單元 31: 積分表
(課本 §7.7)

積分表分成 6 大類型的積分:

I. 基本函數 (公式 1 - 公式 8):

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \sin\,dx = -\cos x + C$$

$$\vdots$$

II. 有理函數 (公式 9 - 公式 14):

$$\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

$$\vdots$$

III. 被積函數含 $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, 或 $\sqrt{x^2-a^2}$ (公式 15 - 公式 18)

IV. 被積函數含三角函數 (公式 19 - 公式 26)

V. 被積函數含指數函數 (公式 27 - 公式 31)

VI. 被積函數含對數函數 (公式 32 - 公式 38)

使用原則 (注意事項):

(i) 先辨別被積函數屬於哪一類型.

(ii) 經由展開, 長除法, 配方法, 代入法等運算過程, 將原有的被積函數化成與公式完全相同後, 才可套用公式.

以例說明如下:

例 1. 試求

$$\int \sqrt{3-x^2}\,dx$$

<解> 因爲被積函數 $\sqrt{3-x^2}$ 是屬於第三類型中的 $\sqrt{a^2-x^2}$, 故觀察相關的公式後, 如下的公式 17 (取負號) 與原式完全吻合:

$$\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 \pm x^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}\,dx\right)$$

故, 令 $a^2 = 3$ 後, 直接使用公式 17, 可得

$$\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3-x^2} + 3\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,dx\right)$$

接著等號右邊的積分也是屬於第三類型, 且與如下的公式 15 完全一樣:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

因此, 取 $a^2 = 3$ 後, 直接代公式 15, 可得

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{3-x^2} + 3\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

例 2. 試求

$$\int \sin(3x)\cos(4x)\,dx$$

<解> 因爲被積函數爲三角函數, 故屬於第四類型, 經觀察後, 如下的公式 26 完全吻合:

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C,\ \ a^2 \neq b^2$$

因此, 令 $a = 3$ 且 $b = 4$ 後, 直接使用公式 26, 可得

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\cos(4x)\,dx &= -\frac{\cos(7x)}{14} - \frac{\cos(-x)}{-2} + C \\ &= -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos x}{2} + C\end{aligned}$$

例 3. 試求

$$\int x^2 e^{3x}\,dx$$

<解> 被積函數含有指數函數, 故屬於第五類型, 經比對相關的公式後, 如下的公式 29 可適用:

$$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

這是一個減縮公式 (reduction formular), 每使用一次, 需再積分的 x 次方項就減少 1 個冪次, 直至 x 次方項完全消失, 最後再對剩下的指數函數積分.

令 $a = 3$ 且 $n = 2$ 後, 直接使用公式 29, 可得

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int x e^{3x}\, dx$$

接著針對等號右邊的積分, 可再使用一次公式 29, 或直接使用如下的公式 28:

$$\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

所以, 令 $a = 3$ 並直接使用公式 28, 可得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{e^{3x}}{9}(3x - 1)\right] + C \\
&= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x}(3x - 1) + C
\end{aligned}$$

例 4. 試求

$$\int e^{2x} \sin(3x - 1)\, dx$$

<解> 因爲被積函數內含有指數函數, 比對第五類型的相關公式後, 如下的公式 30 與原式最相似, 差別在於公式

內是 sin 函數的 “b 倍積分變數”, 而原式內卻是 sin 函數的 “積分變數的倍數, 再減去一個常數”:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))+C$$

故不能直接使用公式, 而需要透過如下的代入法, 將原式轉換成與公式完全一樣的型式, 才能使用公式 30: 令

$$u = 3x-1 \;\Rightarrow\; du = 3dx,\; x = \frac{u+1}{3}$$

則

$$\begin{aligned}
&\int e^{2x}\sin(3x-1)\,dx \\
&\qquad = \int e^{2(u+1)/3}\cdot\sin u\cdot\frac{1}{3}\,du \\
&\qquad = \frac{1}{3}e^{2/3}\int e^{2u/3}\sin u\,du
\end{aligned}$$

此時, 上式中的積分與公式 30 完全吻合, 故令 $a = 2/3$ 以及 $b = 1$ 後, 直接用公式 30, 可得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{3}e^{2/3}\left[\frac{e^{2u/3}}{4/9+1}\left(\frac{2}{3}\sin u-\cos u\right)\right]+C \\
&= \frac{3}{13}e^{2/3}e^{2(3x-1)/3}\left[\frac{2}{3}\sin(3x-1)-\right. \\
&\qquad\qquad \left.\cos(3x-1)\right]+C
\end{aligned}$$

經化簡後,

$$\text{原式} = \frac{3}{13}e^{2x}\left[\frac{2}{3}\sin(3x-1) - \cos(3x-1)\right] + C$$

例 5. 試求

$$\int \frac{x^2}{9+x^2}\,dx$$

<解> 被積函數是一有理函數, 故檢視第二類型有關有理函數的積分公式後, 得知需先經過下列的除法後, 才能確認出適當可用的公式: 首先

$$\frac{x^2}{9+x^2} = \frac{x^2+9-9}{9+x^2} = 1 - \frac{9}{9+x^2}$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \left(1 - \frac{9}{9+x^2}\right) dx \\ &= x - 9\int \frac{1}{9+x^2}\,dx \end{aligned}$$

接者比對第二類型的積分公式後, 等號右邊的積分完全與如下的公式 13 一樣:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

所以, 令 $a^2 = 9$ 後, 得

$$\begin{aligned} 原式 &= x - 9\left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C \\ &= x - 3\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

例 6. 試求

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}\,dx$$

<解> 被積函數含有二次多項式的開平方根, 故應屬於第三類型. 但第三類型中的被積函數均未含 x 的一次項, 然而原式中的被積函數卻有 x 的一次項. 處理這類問題的技巧是, 先將二次多項式配方, 再以代入法化簡, 則可比對出適用的積分公式, 過程如下:

配方法:

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$$

代入法: 令

$$u = x - 1 \;\Rightarrow\; du = dx$$

可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2-4}}\,du \end{aligned}$$

因此, 得出上式中的積分與如下的公式 16 (取負號) 完全吻合:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

最後, 令 $a^2 = 4$, 並根據公式 16,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \ln\left|u+\sqrt{u^2-4}\right| + C \\ &= \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-4}\right| + C \\ &= \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right| + C \end{aligned}$$