單元 46: 非線性自主系統: 理論篇
(課本 §11.3)

一. 非線性自主系統

非線性自主系統 (nonlinear autonomous system) 的型式如下:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

其中

$$f_i : R^n \to R^1,\ i = 1, \ldots, n$$

註 1. 不要求爲 $x_1, \ldots, x_n$ 的線性組合, 故稱非線性 (nonlinear).

註 2. 僅爲 $x_1, \ldots, x_n$ 的表示式, 不明確地與時間 t 有關, 故稱自主 (autonomous).

等價的矩陣型式 (matrix form) 如下:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

且向量值函數

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix} : R^n \to R^n$$

舉例, 非線性自主系統

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 \end{aligned}$$

相當於

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 \\ 4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 \end{bmatrix}$$

註. 除非 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 爲線性的向量值函數, 否則不太可能求出明確的解, 最多只求出此系統的數值解.

目標: 僅探討

(1) 平衡點 (equilibrium), 亦即, 使得

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

也就是說,

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{0}$$

的點

$$\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_n)$$

(2) 平衡點的穩定性 (stability).

註 1. 若由平衡點開始, 施以小干擾後, 系統仍回到此平衡點, 則稱此平衡點爲穩定 (stable); 否則, 爲不穩定 (unstable).

註 2. 有二種方法判斷平衡點的穩定性: 解析法 (analytical approach) 與圖形法 (graphical approach). 爲方便計, 只考慮二個變數及二個方程式的系統.

二. 複習 (1 個變數與 1 個方程式): 試求

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)$$

的平衡點及其穩定性.

<解> (i) 平衡點: 根據定義, 令

$$x(1-x) = 0$$

得二個平衡點

$$\hat{x}_1 = 0 \text{ 與 } \hat{x}_0 = 1$$

(ii) 圖形法: 繪出

$$f(x) = x(1-x)$$

如圖示.

針對平衡點 $\hat{x}_1 = 0$, 施以小干擾 $z < 0$, 由圖形得知, 會導致

$$\frac{dx}{dt} < 0$$

亦即,

$$x = z \downarrow$$

所以, 系統遠離 0. 接著, 施以小干擾 $z > 0$, 由圖形得知, 會導致

$$\frac{dx}{dt} > 0$$

亦即,

$$x = z \uparrow$$

所以, 系統也遠離 0. 因此, 平衡點 $\hat{x}_1 = 0$ 爲不穩定 (unstable).

同理, 針對平衡點 $\hat{x}_2 = 1$, 施以小干擾 $z < 0$, 由圖形得知, 會導致

$$\frac{dx}{dt} > 0$$

也就是說

$$x = 1 + z \uparrow 1$$

所以, 系統會回到 1. 另外, 施以小干擾 $z > 0$, 由圖形得知, 會導致

$$\frac{dx}{dt} < 0$$

也就是說

$$x = 1 + z \downarrow 1$$

所以, 系統又會回到 1. 因此, 平衡點 $\hat{x}_2 = 1$ 爲局部穩定 (locally stable).

(iii) 解析法: 以平衡點的特徵值的正負性判斷其穩定性. 首先,

$$f'(x) = 1 - 2x$$

則, $\hat{x}_1 = 0$ 的特徵值

$$\lambda_1 \stackrel{\text{def}}{=} f'(\hat{x}_1) = f'(0) = 1 > 0$$

所以, 平衡點 $\hat{x}_1 = 0$ 爲不穩定.

又, $\hat{x}_2 = 1$ 的特徵值

$$\lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} f'(\hat{x}_2) = f'(1) = 1 - 2 = -1 < 0$$

所以, 平衡點 $\widehat{x_2} = 1$ 爲局部穩定.

理由: 設 $\hat{x}$ 爲一平衡點, 施以小干擾 z 後, 系統的演變爲

$$x(t) = \hat{x} + z(t)$$

所以,

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

相當於

$$\frac{d(\widehat{x}+z)}{dt} = f(\widehat{x}+z) \tag{1}$$

又因爲 $\widehat{x}$ 爲平衡點, 故

$$\frac{d\widehat{x}}{dt} = 0 \text{ 且 } f(\widehat{x}) = 0$$

因而可導出

$$\frac{d(\widehat{x}+z)}{dt} = \frac{d\widehat{x}}{dt} + \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} \tag{2}$$

以及 $f(\widehat{x}+z)$ 在 $x=\widehat{x}$ 的線性近似:

$$\begin{aligned} f(\widehat{x}+z) &\approx f(\widehat{x}) + f'(\widehat{x})(\widehat{x}+z-\widehat{x}) \\ &= f'(\widehat{x})z \end{aligned} \tag{3}$$

因此, 合併 (1), (2), (3) 式, 得小干擾 z 的演變情況

$$\frac{dz}{dt} \approx f'(\widehat{x})z$$

由此導出

$$z(t) \approx z(0)e^{\lambda t}$$

其中

$$\lambda = f'(\widehat{x})$$

而且

(i) 若

$$\lambda = f'(x) < 0$$

則當 $t \to \infty$ 時,

$$z(t) \to z(0)e^{-\infty} = 0$$

因而

$$x(t) = \hat{x} + z(t) \to \hat{x}$$

所以, 平衡點 $\hat{x}$ 爲局部穩定.

(ii) 若

$$\lambda = f'(x) > 0$$

則當 $t \to \infty$ 時,

$$z(t) \to z(0)e^{\infty} = \pm\infty$$

因而導出

$$x(t) = \hat{x} + z(t) \to \pm\infty \neq \hat{x}$$

所以, 平衡點 $\hat{x}$ 爲不穩定.

亦即, 由 $f'(\hat{x})$ 的正負就可判斷出平衡點的穩定性特徵, 故稱 $f'(\hat{x})$ 爲平衡點 $\hat{x}$ 的特徵值.

重點: 透過 $f(x)$ 在平衡點 $\hat{x}$ 的線性化 (linearization), 將干擾的演變表現出, 而以此判斷平衡點的穩定性. 現將此概念推廣至非線性系統, 如下所述.

三. 解析法: 設非線性自主系統 (nonlinear autonomous system) 爲

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2)\\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

其矩陣型式爲

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

設 $\hat{\mathbf{x}}$ 爲一平衡點, 亦即,

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

若施以一小干擾 $\mathbf{z}$ 後, 系統爲

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}(t)$$

其演變的情況爲

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

亦相當於

$$\frac{d(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}) \tag{4}$$

因爲 $\mathbf{z}$ 很小, 所以, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ 的線性化 (linearization) 爲

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$$

其中 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 爲 $\mathbf{f}$ 的 Jacobi 矩陣在 $\hat{\mathbf{x}}$ 的值, 亦即,

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{\mathbf{x}}) \end{array}\right]$$

由此導出

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}) &\approx \mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}) \\ &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z} \end{aligned} \tag{5}$$

因此, 合併 (4) 式與 (5) 式, 可得, 當 $\mathbf{z}$ 靠近 $\mathbf{0}$ 時, 亦即, 施以小干擾 $\mathbf{z}$ 後,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{z}}{dt} \approx D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z} \tag{6}$$

此乃一線性系統, 在 §11.1 中已知如何分析其平衡點的穩定性. 也就是說, 原非線性系統平衡點的穩定性可經由干擾演變的近似線性系統的平衡點的穩定性而判斷出.

註 1. 分析後的結果爲一局部性的結論, 因爲要求 $\mathbf{z}$ 靠近 $\mathbf{0}$ 才能得一好的線性近似.

註 2. (6) 式暗示可用線性系統

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

的平衡點的穩定性來判斷原非線性系統

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

的平衡點 $\hat{\mathbf{x}}$ 的穩定性, 詳述如下.

事實 (Hartman-Grobman): 當 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 的特徵值不爲 0 或不爲純虛數時, 若

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$$

且

$$\mathbf{z} \to \mathbf{0}$$

時, 則

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

的演變行爲近似於

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

的演變行爲.

註 3. 名詞定義:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

的向量 (方向) 場稱作原始向量場 (original vector field).

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

的向量場稱作線性化向量場 (linearized vector field).

因此, 上述註 2 中的 “事實” 就相當於

$$\text{原始向量場} \approx \text{線性向量場}$$

註 4. 平衡點的分類: 設 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 的特徵值爲 λ_1 與 λ_2, 則

(i) $\hat{\mathbf{x}}$ 爲局部穩定節點 (水槽口), 若 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

(ii) $\hat{\mathbf{x}}$ 爲鞍點 (不穩定), 若 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (或 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$).

(iii) $\hat{\mathbf{x}}$ 爲不穩定節點 (泉源口), 若 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

(iv) $\hat{\mathbf{x}}$ 爲穩定螺旋點, 若 λ_1 與 λ_2 的實部均爲負.

(v) $\hat{\mathbf{x}}$ 爲不穩定螺旋點, 若 λ_1 與 λ_2 的實部均爲正.

註. λ_1 與 λ_2 爲純虛數時, 無法判斷穩定性.

例 1. 設非線性自主系統爲

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2\\ \frac{dx_2}{dt} &= 4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2\end{aligned}$$

(a) 試求此非線性系統的平衡點.

(b) 判斷 (a) 中的平衡點的穩定性.

<解> (a) 根據定義, 求平衡點相當於解

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 &= 0 \\ 4x_2 - 5x_2^2 - 7x_1x_2 &= 0 \end{aligned}$$

因式分解後, 亦相當於解

$$\begin{aligned} x_1(1 - 2x_1 - 2x_2) &= 0 \\ x_2(4 - 5x_2 - 7x_1) &= 0 \end{aligned}$$

由此得,

$$x_1 = 0 \text{ 或 } 2x_1 + 2x_2 = 1$$

且

$$x_2 = 0 \text{ 或 } 7x_1 + 5x_2 = 4$$

因此, 得如下的 4 種組合.

第一種組合:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

由此導出平衡點

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$$

第二種組合:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 7x_1 + 5x_2 &= 4 \end{aligned}$$

由此得平衡點

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(0, \frac{4}{5}\right)$$

第三種組合:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

由此可導出平衡點

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

第四種組合:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 7x_1 + 5x_2 &= 4 \end{aligned}$$

經由高斯消去法, 將 “第一式 × 7 − 第二式 × 2” 取代第二式, 得等價的

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

解之, 得

$$x_2 = -\frac{1}{4}$$

以及

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

所以, 平衡點

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

註. 透過數學軟體繪此非線性系統的方向場 (direction field) 可略爲觀察此四個平衡點的穩定性.

(b) 因爲當 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ 且 $\mathbf{z}$ 靠近 $\mathbf{0}$ (小干擾) 時,

$$\text{非線性系統} \approx \frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{z}$$

因此, 以 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$ 的平衡點判斷 $\hat{\mathbf{x}}$ 的穩定性.

首先, 計算 Jacobi 矩陣

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-4x_1-2x_2 & -2x_1 \\ -7x_2 & 4-10x_2-7x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

此乃因爲

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= x_1-2x_1^2-2x_1x_2 \\ f_2(x_1,x_2) &= 4x_2-5x_2^2-7x_1x_2 \end{aligned}$$

接著, 分別將非線性系統的 4 個平衡點代入 Jacobi 矩陣內, 得 $D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$, 並以上述近似的線性系統判斷出原非線性系統平衡點的穩定性, 過程如下.

1. $(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=(0,0)$:

$$D\mathbf{f}(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

由此得

$$\lambda_1=1>0 \text{ 且 } \lambda_2=4>0$$

故, 線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲一不穩定節點 (unstable node, 泉源口). 因此, 原非線性系統的平衡

點 $(0,0)$ 爲不穩定節點 (泉源口). 此乃因爲

$$\text{原非線性系統} \approx \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

故, 原非線性系統在 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0,0)$ 穩定性 $\approx$ 線性系統的平衡點 $(0,0)$ 的穩定性.

2. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(0, \frac{4}{5}\right)$:

$$D\mathbf{f}\left(0, \frac{4}{5}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{28}{5} & -4 \end{bmatrix}$$

由此導出特徵值

$$\lambda_1 = -\frac{3}{5} < 0 \text{ 且 } \lambda_2 = -4 < 0$$

因此, 平衡點 $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ 爲一局部穩定節點 (locally stable node, 水槽口). 此乃因爲原系統平衡點 $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ 的穩定性 $\approx$ 線性系統 $(0,0)$ 的穩定性.

3. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

$$D\mathbf{f}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

由此可得特徵值

$$\lambda_1 = -1 < 0 \text{ 且 } \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0$$

因此，根據前面所述的相同理由，原非線性系統的平衡點 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 爲一鞍點 (saddle).

4. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$:

$$
\begin{aligned}
D\mathbf{f}\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) &= \begin{bmatrix} 1-3+\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} & 4+\frac{5}{2}-\frac{21}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

由此導出

$$\Delta = -\frac{15}{8} + \frac{21}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

以及

$$\tau = -\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

因爲

$$\tau^2 - 4\Delta = \frac{1}{16} - 3 < 0$$

故導出二特徵值

$$\lambda_1,\ \lambda_2 : \text{共軛複數}$$

又由

$$\tau = -\frac{1}{4} < 0$$

可推導出

$$2(\text{實部}) = -\frac{1}{4} < 0$$

也就是說, 實部均爲負. 因此, 線性系統的平衡點 $(0, 0)$ 爲穩定螺旋點 (stable spiral). 故, 非線性系統的平衡點 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ 亦爲穩定螺旋點, 此乃因爲原非線性系統的平衡點 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ 的穩定性 $\approx$ 線性系統平衡點 $(0, 0)$ 的穩定性.

四. 圖形法: 設非線性自主系統如下

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

首先, 繪曲線

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \text{ 與 } f_2(x_1, x_2) = 0$$

的圖形 (稱作零值曲線, zero isoclines 或 null clines), 其交點

$$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

就是平衡點, 因爲

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

同時使得

$$f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0 = f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$$

如圖示.

接著, 沿著過 $\hat{\mathbf{x}}$ 的水平線由左向右移, 則

(1) f_1 由 $f_1 > 0$ 演變至 $f_1 < 0$. 所以,

$$f_1 \downarrow$$

由此可導出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0$$

此乃因爲水平方向移動, 表示 x_2 不變, 故得 f_1 對 x_1 的變化率, 亦即, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$.

(2) f_2 由 $f_2 > 0$ 演變至 $f_2 < 0$. 所以,

$$f_2 \downarrow$$

由此, 根據與上述相同的理由, 可導出

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} < 0$$

再沿著過 $\hat{\mathbf{x}}$ 的垂直線由下往上移，則

(1) f_1 由 $f_1 < 0$ 演變至 $f_1 > 0$. 所以，

$$f_1 \uparrow$$

由此可導出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0$$

此乃因為垂直方向移動，表示 x_1 不變，故得 f_1 對 x_2 的變化率，亦即，$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$.

(2) 同理，可觀察出，f_2 由 $f_2 > 0$ 演變至 $f_2 < 0$，也就是說

$$f_2 \downarrow$$

因而可導出

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0$$

因此，綜合上述的變化率，得

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\tau = (-) + (-) < 0$$

且

$$\Delta = (-)(-) - (+)(-) = (+) + (+) > 0$$

所以, 二特徵值 λ_1, λ_2 可爲

(1) 2 負實數, 而導出平衡點 $\hat{\mathbf{x}}$ 爲一穩定節點.

(2) 2 實部爲負的共軛複數, 而導出平衡點 $\hat{\mathbf{x}}$ 爲一穩定螺旋點.

簡言之, $\hat{\mathbf{x}}$ 爲一穩定平衡點.

註. 有時圖形法無法做出結論, 此時需回到解析法以特徵值判斷. 例如, 若

$$D\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

則

$$\Delta = (+)(-) - (-)(+) = (-) + (+) : \text{正負未定}$$

以及

$$\tau = (+) + (-) : \text{正負未定}$$

故, 圖形法失效.

例 2. 設非線性自主系統爲

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 5 - x_1 - x_1x_2 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1x_2 - 3x_2\end{aligned}$$

試以圖形法判斷平衡點 $(3, 2)$ 的穩定性.

<解> 需先繪製零值曲線, 亦即, 令

$$\frac{dx_1}{dt} = 0$$

此乃相當於

$$5 - x_1 - x_1x_2 + 2x_2 = 0$$

整理後, 上式等價於

$$x_2(x_1 - 2) = 5 - x_1$$

由此可得

$$x_2 = \frac{5 - x_1}{x_1 - 2} = -1 + \frac{3}{x_1 - 2} \tag{7}$$

又令

$$\frac{dx_2}{dt} = 0$$

亦即,

$$x_1x_2 - 3x_2 = 0$$

整理後, 可得

$$x_2(x_1 - 3) = 0$$

因此,

$$x_2 = 0 \text{ 或 } x_1 = 3 \tag{8}$$

接著, 繪出 (7) 式與 (8) 式中的曲線, 並且判斷出 f_1 與 f_2 在各自分割出的區域中的正負後, 可得零值曲線圖, 如圖示.

註. 判斷 f_1 與 f_2 在各自分割出的區域中的正負如下所述:

(1) 針對曲線

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1 + \frac{3}{x_1 - 2}$$

代 $(5, 2)$ 入

$$f_1(x_1, x_2) = (5 - x_1) - x_2(x_1 - 2)$$

得

$$f_1(5,2) = 0 - 2(5-2) = -6 < 0$$

故,

$$f_1(x_1,x_2) = \begin{cases} -, & \text{在曲線之上} \\ +, & \text{在曲線之下} \end{cases}$$

(2) 針對曲線

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

代 $(4,2)$ 入

$$f_2(x_1,x_2) = x_2(x_1-3)$$

得

$$f_2(4,2) = 2(4-3) = 2 > 0$$

故,

$$f_2(x_1,x_2) = \begin{cases} +, & \text{在曲線之右} \\ -, & \text{在曲線之左} \end{cases}$$

再根據零值曲線確定出 f_1 與 f_2 在平衡點 $(3,2)$ 的偏導函數, 以求得近似線系統的係數矩陣 $D\mathbf{f}(3,2)$, 並以此判斷平衡點 $(3,2)$ 的穩定性, 過程如下:

沿著過平衡點 $(3, 2)$ 的水平線由左向右移，得

(1) f_1 由 $f_1 > 0$ 演變至 $f_1 < 0$. 所以,

$$f_1 \downarrow$$

由此導出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0$$

此乃因爲水平方向移動，表示 x_2 不變，故得 f_1 對 x_1 的變化率，亦即，$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$.

(2) f_2 由 $f_2 < 0$ 演變至 $f_2 > 0$. 所以,

$$f_2 \uparrow$$

故，同理可得

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} > 0$$

沿著過平衡點 $(3, 2)$ 的垂直線由下往上移，則

(1) f_1 由 $f_1 > 0$ 演變至 $f_1 < 0$. 所以,

$$f_1 \downarrow$$

由此可得

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$$

此乃因爲垂直方向移動, 表示 x_1 不變, 故得 f_1 對 x_2 的變化率, 亦即, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$.

(2) $f_2(3, x_2) = x_2(3-3) \equiv 0$. 所以, 根據上述相同的理由,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$$

因此, 合併上述的變化率, 得

$$D\mathbf{f}(3,2) = \begin{bmatrix} - & - \\ + & 0 \end{bmatrix}$$

故, 係數矩陣的

$$\Delta = (-)(0) - (-)(+) = (+)$$

且

$$\tau = (-) + (0) = (-)$$

由此導出二特徵值 λ_1, λ_2 可爲

(1) 2 負實數, 而得平衡點 $(3,2)$ 爲一穩定節點.

(2) 2 實部爲負的共軛複數, 而得平衡點 $(3,2)$ 爲一穩定螺旋點.

簡言之, $(3,2)$ 爲一穩定平衡點.

註 1. 解析法: 因爲

$$f_1(x_1, x_2) = 5 - x_1 - x_1x_2 + 2x_2$$

以及

$$f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - 3x_2$$

故, Jacobi 矩陣

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 - x_2 & -x_1 + 2 \\ x_2 & x_1 - 3 \end{bmatrix}$$

代入平衡點 $(3,2)$, 得近似線性系統的係數矩陣

$$D\mathbf{f}(3,2) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

由此導出

$$\Delta = 0 + 2 = 2 > 0 \text{ 且 } \tau = -3$$

以及

$$\tau^2 - 4\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$$

所以, 特徵值 λ_1, λ_2 爲二負實數. 故, 近似線性系統的平衡點 $(0,0)$ 爲一穩定節點 (sink). 由此可推導出原系統的平衡點 $(3,2)$ 亦爲一穩定節點 (sink), 較圖形法更明確地判斷出爲何種穩定性.

註 2. 根據零值曲線的圖形或

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ 或 } x_1 = 3$$

以及

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow x_2(x_1 - 2) = 5 - x_1$$

可得另一平衡點

$$(5,0)$$

接著, 分別以圖形法與解析法判斷平衡點 $(5,0)$ 的穩定性如下.

圖形法: 根據前面所得的零值曲線圖, 沿著過平衡點 $(5,0)$ 的水平線由左向右移動, 得

(1) f_1 由 $f_1 > 0$ 演變至 $f_1 < 0$. 所以,

$$f_1 \downarrow$$

亦即,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} < 0$$

(2) $f_2(x_1, 0) = 0(x_1 - 3) \equiv 0$. 所以,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

又沿著過平衡點 $(5, 0)$ 的垂直線由下往上移動, 得

(1) f_1 由 $f_1 > 0$ 演變至 $f_1 < 0$. 所以,

$$f_1 \downarrow$$

由此導出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} < 0$$

(2) 在垂直移動下, $x_1 = 5$ 且

$$f_2(5, x_2) = x_2(5 - 3) = 2x_2$$

故由 $f_2 < 0$ 演變至 $f_2 > 0$. 所以,

$$f_2 \uparrow$$

也就是說

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0$$

故，合併上述的變化率，得近似線性系統的係數矩陣

$$D\mathbf{f}(5,0) = \begin{bmatrix} - & - \\ 0 & + \end{bmatrix}$$

所以，

$$\Delta = (-)(+) - 0 = (-)$$

且

$$\tau = (-) + (+) = \text{未知，但不影響判斷}$$

而得特徵值 λ_1，λ_2 爲一正，一負. 因此，原系統的平衡點 $(5,0)$ 爲一鞍點 (saddle).

解析法：因爲

$$f_1(x_1,x_2) = 5 - x_1 - x_1x_2 + 2x_2$$

以及

$$f_2(x_1,x_2) = x_1x_2 - 3x_2$$

故，Jacobi 矩陣

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 - x_2 & -x_1 + 2 \\ x_2 & x_1 - 3 \end{bmatrix}$$

代入平衡點 $(5,0)$, 得近似線性系統的係數矩陣為

$$Df(5,0) = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

由此導出特徵值

$$\lambda_1 = -1 \text{ 與 } \lambda_2 = 2$$

所以, 近似線性系統的平衡點 $(0,0)$ 為一鞍點, 而可導出原非線性系統的平衡點 $(5,0)$ 亦為一鞍點.