單元 13: μ 與 $\mu_1 - \mu_2$ 的小樣本信賴區間

(課本 §8.8)

一. 在條件 (i) σ^2 未知與條件 (ii) 樣本太小無法採用大樣本法則下, μ 的信賴區間. 設

$$Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

且

$$\overline{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

以及

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

考慮一個樞紐量

$$\begin{aligned} T &= \frac{\overline{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\overline{Y} - \mu)/\sigma/\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)S^2/(\sigma^2(n-1))}} \\ &= \frac{Z}{\sqrt{\chi^2(n-1)/(n-1)}} \sim T(n-1) \end{aligned}$$

此乃因為 $\overline{Y}$ 與 S^2 相互獨立, 得

$$\frac{\overline{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

與

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

相互獨立, 並由 t 分布的定義所致.

接著, 由表 5, 選取 $t_{\alpha/2}$ 使得

$$P(-t_{\alpha/2} \le T(n-1) \le t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

如圖示, 或

$$\mathsf{R}: t_{\alpha/2} = \mathtt{qt}(1-\alpha/2, \mathtt{df} = n-1)$$

由此得,

$$P\left(-t_{\alpha/2} \le \frac{\overline{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}} \le t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

整理, 得

$$\begin{aligned} P\left(\overline{Y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \le \mu \le \overline{Y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ = \ 1 - \alpha \end{aligned}$$

因此, μ 的信賴係數爲 $1 - \alpha$ 的信賴區間爲

$$\left(\overline{Y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right), \overline{Y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

例 1. 一種新火藥在 8 發子彈的測試下, 得槍口速度爲

$$3005, 2925, 2935, 2965$$

以及

$$2995, 3005, 2937, 2905$$

試求在信賴係數 0.95 下, 眞實平均槍口速度 μ 的信賴區間. 另假設槍速度近似於常態分布.

<解> 因爲 (i) 小樣本 (又近似常態分布) 且 (ii) 未知變異數, 故可採用

$$T = \frac{\overline{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

作爲 μ 的樞紐量. 則一 95% 信賴區間爲

$$\left(\overline{Y} - t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right), \overline{Y} + t_{\alpha/2}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

其中 $P(T(n-1) > t_{\alpha/2}) = 0.025$.

由假設及計算, 得

$$\overline{y} = 2959 \text{ 且 } s = 39.1$$

由表 5, 當 $n = 8$ 時,

$$P(T(7) > 2.365) = 0.025$$

得 $t_{\alpha/2}=2.365$. 因此, 一 95% 信賴區間為

$$\begin{aligned}&\left(2959-2.365\left(\frac{39.1}{\sqrt{8}}\right), 2959+2.365\left(\frac{39.1}{\sqrt{8}}\right)\right)\\=&\ (2926.3, 2991.7)\end{aligned}$$

或 R:

```
y = scan() # 輸入資料
ybar = mean(y)
s = sd(y)
t = qt(0.975, df=7)
ybar-t*s/sqrt(8)
ybar+t*s/sqrt(8)
```

二. 在條件 (i) 共同的變異數 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知及條件 (ii) 小樣本下, $\mu_1-\mu_2$ 的信賴區間. 設

$$Y_{11},\ldots,Y_{1n_1}\overset{\text{iid}}{\sim}N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

且

$$Y_{21},\ldots,Y_{2n_2}\overset{\text{iid}}{\sim}N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

以及此二組樣本亦相互獨立. 令

$$\overline{Y}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}Y_{1i} \text{ 且 } \overline{Y}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_{2i}$$

若 $\theta=\mu_1-\mu_2$, 則一不偏估計量爲

$$\widehat{\theta}=\overline{Y}_1-\overline{Y}_2 \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

此乃因爲

$$\overline{Y}_1 \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \quad \overline{Y}_2 \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

且 $\overline{Y}_1$ 與 $\overline{Y}_2$ 相互獨立所致.

因此, 在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 的假設下,

$$\begin{aligned} Z &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \\ &= \frac{(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1) \end{aligned}$$

但此時 Z 未達樞紐量的標準, 因爲 σ 未知.

接著, 需求一 σ^2 的不偏估計量. 可考慮共用估計量 (pooled estimator)

$$\begin{aligned} S_p^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(Y_{1i}-\overline{Y}_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_{2i}-\overline{Y}_2)^2}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \end{aligned}$$

則, 因為 S_1^2 與 S_2^2 分別是 σ_1^2 與 σ_2^2 的不偏估計量且在 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 的假設下, 得

$$\begin{aligned} E(S_p^2) &= \frac{(n_1-1)E(S_1^2)+(n_2-1)E(S_2^2)}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{(n_1-1)\sigma_1^2+(n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{(n_1+n_2-2)\sigma^2}{n_1+n_2-2}=\sigma^2 \end{aligned}$$

故 S_p^2 是一 σ^2 的不偏估計量.

此外,

$$\begin{aligned} \frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2} &= \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \\ &\sim \chi^2(n_1+n_2-2) \end{aligned}$$

此乃因為

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1)$$

且

$$\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$$

以及 S_1^2 與 S_2^2 相互獨立所致. 最後, 由 $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$ 與 S_1^2, S_2^2 相互獨立可導出 Z 與 S_p^2 亦相互獨立.

因此, 由 t 分布的定義,

$$
\begin{aligned}
T &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{Z}{\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2(n_1+n_2-2)}}} \\
&= \frac{(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\frac{\sigma}{S_p} \\
&= \frac{(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim T(n_1+n_2-2)
\end{aligned}
$$

可作爲 $\mu_1-\mu_2$ 的樞紐量.

最後, 經由類似於第一部分的計算整理, 得信賴係數爲
$-\alpha$ 的 $\mu_1-\mu_2$ 的信賴區間爲

$$
\Bigg(\overline{Y}_1-\overline{Y}_2-t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},
\qquad \overline{Y}_1-\overline{Y}_2+t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\Bigg)
$$

其中

$$P(T(n_1+n_2-2)>t_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$$

且

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

例 2. 在兩種組裝程序訓練下, 組裝零件所需的時間樣本分別爲,

標準程序:	32	37	35	28	41	44
	35	31	34			
新程序:	35	31	29	25	34	40
	27	32	31			

樣本大小分別爲 $n_1 = 9$ 與 $n_2 = 9$. 試以信賴係數 0.95 估計眞實的期望値差 $\mu_1 - \mu_2$. 又假設 (i) 組裝時間近似於常態分布與 (ii) $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2$ 且兩組樣本相互獨立.

<解> 由假設, 可採用

$$T = \frac{(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

作爲 $\mu_1 - \mu_2$ 的樞紐量. 因此, 一 95% 信賴區間界限爲

$$(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2) \pm t_{\alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

此處

$$\overline{y}_1 = 35.22, \quad \overline{y}_2 = 31.56$$

以及

$$\sum_{i=1}^{9} (y_{1i} - \overline{y}_1)^2 = 195.56$$

與

$$\sum_{i=1}^{9}(y_{2i}-\overline{y}_2)^2 = 160.22$$

且得

$$\begin{aligned} S_p^2 &= \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \\ &= \frac{195.56+160.22}{9+9-2} = 22.24 \end{aligned}$$

又由表 5,

$$P(Y(16) > 2.120) = 0.025$$

故 $t_{\alpha/2} = 2.120$. 因此, 95% 信賴區間界限爲

$$\begin{aligned} &(35.22-31.56) \pm (2.120)\sqrt{22.24}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} \\ &\quad = 3.66 \pm 4.71 \end{aligned}$$

得信賴區間爲 $(-1.05, 8.37)$. 因爲此區間含有正負值, 而無法判斷此二種訓練程序有差異.

或 R:

```
y1 = scan() # 輸入第一組資料
y2 = scan() # 輸入第二組資料
n1 = length(y1)
```

```
n2 = length(y2)
y1bar = mean(y1)
y2bar = mean(y2)
s12 = var(y1)
s22 = var(y2)
sp2 = ((n1-1)*s12+(n2-1)*s22)/(n1+n2-2)
t = qt(0.975, n1+n2-2)
(y1bar-y2bar)-t*sqrt(sp2)*sqrt(1/n1+1/n2)
(y1bar-y2bar)+t*sqrt(sp2)*sqrt(1/n1+1/n2)
```