

單元 10: 全機率律與貝氏法則

(課本 §2.10)

定義 1. 稱 $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ 為 S 的一分割 (partiton), 若下列二項成立:

$$(1) S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$$

$$(2) B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$$

定理 2.8 (全機率律, Law of Total Probability). 設 $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ 為 S 的一分割且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, k$. 則對任一事件 A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)$$

<證> 因為 $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ 為 S 的一分割, 可得

$$\begin{aligned} A &= A \cap S \\ &= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k) \\ &\quad (\text{根據分配律}) \end{aligned}$$

且 $A \cap B_i$ 間互斥, 如下圖所示:

接著根據互斥事件的加法律以及乘法律, 得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_K)P(B_k) \\ &= \sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

註. 經常直接求 $P(A)$ 不易, 但容易求 A 的條件機率 $P(A|B_i)$, 而以全機率律間接地求 $P(A)$.

定理 2.9 (貝氏法則, Bayes' Rule). 設 $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ 為 S 的一分割且 $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. 則對任一事件 A ,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)}$$

<證> 首先根據條件機率的定義,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

接著應用乘法律於上式的分子，可得

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

最後將全機率律作用於上式的分母，得

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)}$$

註．設有 k 種原因 $B_1, \dots, B_k$ 可導致結果 A ，且每種原因下導致結果的機率 ($P(A|B_i)$) 以及每種原因發生的機率 ($P(B_i)$) 均已知 (可求得)，則探究結果 A 是由第 j 種原因造成的機率 $\Leftrightarrow$ 求 $P(B_j|A)$ ，可由貝氏法則計算出．

例 1. 5 條生產線以相同的速率生產保險絲，在正常情況下會隨機地產生出 2% 的瑕疵品．各線以 100 個一捆的方式包裝好並運送出．若在 3 月時，生產線 1 的瑕疵率增為 5%．今由 3 月所出的產品中，任選一捆，檢測其中 3 個，發現有一個壞掉，問此捆是由生產線 1 製造的機率為何？來自於其他 4 條生產線的機率又為何？

<解> 令事件 $D =$ 檢視一捆中的 3 個且有一個壞掉的事件．又令事件 $L_1 =$ 產品來自生產線 1 的事件．則對

應的 Venn diagram 如圖示, 且題意乃相當於求

$$P(L_1|D)$$

亦即, 求結果出自於某一原因的機率. 因此, 根據貝氏法則, 需先求出所有原因, 如 L_1 與 $\overline{L_1}$, 發生的機率, 以及在各個原因下結果發生的機率, 如下所述. 首先, 因為有 5 條速率相同的生產線, 故每條線生產的數量比率是相同的, 而得

$$P(L_1) = 0.2$$

另生產線 1 的瑕疵率為 0.05, 可得

$$P(D|L_1) = 3(0.05)(0.95)^2 = 0.135375$$

同理,

$$P(\overline{L_1}) = 1 - P(L_1) = 1 - 0.2 = 0.8$$

且

$$P(D|\overline{L_1}) = 3(0.02)(0.98)^2 = 0.057624$$

因為其它線的瑕疵率均為 0.02.

接著根據全機率律,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|L_1)P(L_1) + P(D|\overline{L_1})P(\overline{L_1}) \\ &= (0.135375)(0.2) + (0.057624)(0.8) \\ &= 0.0731742 \end{aligned}$$

最後，根據貝氏法則，

$$\begin{aligned}P(L_1|D) &= \frac{P(D|L_1)P(L_1)}{P(D)} \\&= \frac{(0.135375)(0.2)}{0.0731742} \\&= 0.37\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&P(\text{結果出自於其他 4 條生產線}) \\&= 1 - P(L_1|D) = 1 - 0.37 = 0.63\end{aligned}$$