

單元 14: 離散隨機變數的機率分布 (課本 §3.2)

定義 1. Y 取 y 值的機率, 以 $P(Y = y)$ 表示之, 定義為 S 中所有被指定為 y 值的樣本點的機率和, 有時也簡單地以 $p(y)$ 表示之.

註. 因為 $p(y)$ 就是針對每一 y 值指定機率, 故又稱作 Y 的機率函數 (probability function).

定義 2. 一離散隨機變數 Y 的機率分布 (probability distribution) 為一足以提供所有的 $p(y) = P(Y = y)$ 的公式, 表格, 或圖形.

例 1. 由 3 男與 3 女中, 任選 2 人從事一項工作. 令 $Y =$ 選中的女人數. 試求 Y 的機率分布.

<解> 首先根據組合的公式,

$$|S| = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

故, 在任選的假設下,

$$P(E_i) = \frac{1}{15}, \quad i = 1, 2, \dots, 15$$

又 Y 的所有可能值為: 0, 1, 2, 且

$$p(0) = P(Y = 0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{3}{2}}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$p(1) = P(Y = 1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{1}}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$p(2) = P(Y = 2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{3}{0}}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

註. $p(1)$ 的值最大, 可由最初相等的男女人數理解之.

Y 的機率分布可由如下的三種方式呈現出:

(1) 表格:

y	0	1	2
$p(y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2) 圖形: 機率直方圖, 每個長條的面積 = 其所對應的 y 值的機率.

(3) 公式:

$$p(y) = \frac{\binom{3}{y} \binom{3}{2-y}}{\binom{6}{2}}, \quad y = 0, 1, 2$$

定理 3.1. 針對任一離散隨機變數, 下列二式必成立:

(1) 對所有的 y 值,

$$0 \leq p(y) \leq 1$$

(2) 對所有的 y 值累加,

$$\sum_y p(y) = 1$$

註. 機率分布為資料的實際分布 (real distribution) 的一模型.