

單元 20: 卜松機率分布

(課本 §3.8)

將一時間區間 (如, 一星期) 分割成 n 個非常小的子區間
以致於有如下的假設:

(1) $P(\text{在一子區間內, 無事件 (車禍) 發生}) = 1 - p$

(2) $P(\text{在一子區間內, 剛好一事件發生}) = p$

(3) $P(\text{在一子區間, 超過一個事件發生}) = 0$

(4) 區間之間, 事件的發生是相互獨立的.

則, 事件發生的總數

$$Y = n \text{ 個子區間中, 剛好有一事件發生的子區間數} \\ \sim b(n, p)$$

另一合理的假設為 $n \uparrow$ 時 $p \downarrow$. 故可令

$$\lambda = np$$

爲一常數.

因此, 對任一固定的 $y = 0, 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
 P(Y = y) &= \binom{n}{y} p^y (1 - p)^{n-y} \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-y+1)}{y!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^y \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-y} \\
 &= \frac{\lambda^y}{y!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-y} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-y+1)}{n^y} \\
 &= \frac{\lambda^y}{y!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{y-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-y} \\
 &\rightarrow \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}, \text{ 當 } n \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

此乃因爲當 y 固定以及 λ 爲常數時,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \dots \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{y-1}{n}\right) = 1
 \end{aligned}$$

且有限項，亦即 y 項，相乘積的極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-y} = 1$$

以及根據 L'Hôpital 法則，所導出的

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

所致。

註 1. 對於 $y = 0, 1, 2, \dots$,

$$p(y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

確實為一機率密度函數 (pmf). 因為

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據自然指數 e^x 的泰勒展開式：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

註 2. 稱此隨機變數 Y 的極限有卜松機率分布 (Poisson probability distribution).

註 3. 因爲當 $n \rightarrow \infty$ 且 λ 固定時,

$$\binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

故可以用卜松機率近似二項機率, 當 n 夠大且 p 夠小 (或 $\lambda = np < 7$) 時.

註 4. 卜松機率分布是在一段時間內, 空間中, 體積內或任何象度內, 稀有事件發生數的好模型, 如在給定時間區間內的車禍數, 工業意外數, 交換機接收的電話數, 放射性粒子的退化數或一頁打錯的字數, ... 等等均可用卜松機率分布模型化.

正式定義如下:

定義 1. $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 若且爲若

$$p(y) = P(Y = y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

其中 $y = 0, 1, 2, \dots$ 且 $\lambda > 0$.

定理 3.11. 設 $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$. 則

$$\mu = E(Y) = \lambda$$

且

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \lambda$$

<證> 根據期望值的定義,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} y \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\lambda^{y-1}}{(y-1)!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

接著根據如下的變數變換: 令

$$z = y - 1$$

以及

$$\begin{aligned} y = 1 &\Rightarrow z = 0 \\ y = \infty &\Rightarrow z = \infty \end{aligned}$$

可由上式得出

$$E(Y) = \lambda \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}$$

又上式累加符號內的式子剛好是 $\text{Poisson}(\lambda)$ 的 pmf. 故根據 pmf 的定義, 完整的和 (亦即, 從 $z = 0$ 加到 $z = \infty$) 為 1. 因此,

$$E(Y) = \lambda(1) = \lambda$$

當 pmf $p(y)$ 的分母含有 $y!$ 時, 一個求變異數的典型作法是, 先求 $E[Y(Y-1)]$, 再得出 $E(Y^2)$, 最後導出 $\text{Var}(Y)$, 過程如下:

$$\begin{aligned} E[Y(Y-1)] &= \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1) \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda^2 \sum_{y=2}^{\infty} \frac{\lambda^{y-2}}{(y-2)!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

接著經由類似的變數變換 $z = y - 2$, 可由上式得出

$$E[Y(Y-1)] = \lambda^2 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}$$

同樣可觀察出上式累加符號內的式子為 $\text{Poisson}(\lambda)$ 的 pmf. 故完整的和為 1. 因而得出,

$$E[Y(Y-1)] = \lambda^2(1) = \lambda^2$$

故

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E[Y(Y-1)] + E(Y) \\ &= \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

例 1. 設某製造業工廠的意外數為每月平均三次，若上月發生 6 次，試問若 μ 依然仍為 3，6 次是否高度的不可能？或 6 次是否指出 μ 應該增高？

<解> 因為每月平均意外數為 3，以及按常理言，意外是屬於稀有事件，故可假設

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \text{每月的意外數} \sim \text{Poisson}(3)$$

則

$$\begin{aligned} P(Y \geq 6) &= 1 - \sum_{y=0}^5 e^{-3} \frac{3^y}{y!} \\ &= 1 - 0.916 \text{ (查表3)} \\ &= 0.084 \end{aligned}$$

不會很小，故事件 ($Y = 6$) 不會是高度不可能。又

$$\begin{aligned} P(Y = 6) &= P(Y \leq 6) - P(Y \leq 5) \\ &= 0.966 - 0.916 \text{ (查表3)} \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

不會很小，也與上述結論相符。

若由經驗法則，根據

$$\mu = \lambda = 3$$

且

$$\sigma^2 = \lambda = 3$$

以及

$$\sigma = \sqrt{3} = 1.73$$

可得出

$$\begin{aligned} P(Y \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \\ &= P(Y \in [-0.46, 6.46]) \\ &= P(Y \in [0, 6.46]) \\ &\approx 0.95 \end{aligned}$$

一個極高的值，然而 ($Y = 6$) 落在邊界附近，所以不會是高度不可能，但卻是充分地不可能保證 $\mu = 3$ (因為 $Y = 6$ 確實比 3 高出了近 2 個標準差，有點高，以致於無法確保 $\mu = 3$)。