單元 21: 動差與動差母函數
(課本 §3.9)

定義 1. 隨機變數 Y 的以 0 (原點) 爲中心的 k 階動差 (kth moment) 定義爲 $E(Y^k)$, 並以 μ'_k 表示之.

註. 隨機變數 Y 的期望值

$$E(Y) = \mu'_1 = \mu$$

故又稱作一階動差. 又隨機變數 Y 的平方的期望值

$$E(Y^2) = \mu'_2$$

故又稱作二階動差.

定義 2. 隨機變數 Y 的以 μ 爲中心的 k 階中央動差 (kth central moment) 定義爲 $E[(Y-\mu)^k]$, 並以 μ_k 表示之.

註 1. 隨機變數 Y 的變異數

$$\sigma^2 = E[(Y-\mu)^2] = \mu_2$$

故又稱作二階中央動差.

註 2. 若二隨機變數 Y, Z 有相同的 k 階動差, $k = 1, 2, 3, \ldots$, 則在相當一般的條件下,

$$Y \stackrel{\mathcal{D}}{=} Z$$

亦即, Y 與 Z 有相同的分布.

定義 3. 隨機變數 Y 的動差母函數 (moment-generating function, 簡稱爲 mgf)

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(e^{tY})$$

稱此動差母函數存在, 若存在 $b > 0$ 使得當 $|t| \le b$ 時, $m(t)$ 有限.

註. 爲何稱 $m(t) = E(e^{tY})$ 爲 Y 的動差母函數?

<答> 首先, 根據隨機變數的函數的期望值的公式,

$$\begin{aligned} E(e^{tY}) &= \sum_y e^{ty} p(y) \\ &= \sum_y \left[1 + ty + \frac{(ty)^2}{2!} + \frac{(ty)^3}{3!} + \cdots \right. \\ & \qquad \left. + \frac{(ty)^k}{k!} + \cdots \right] p(y) \end{aligned}$$

再根據當 $m(t)$ 存在時, 兩個無窮項的累加和 (summation) 可交換, 因而可由上式得出

$$
\begin{aligned}
& E(e^{tY}) \\
= \; & \sum_y 1 \cdot p(y) + t\sum_y yp(y) + \frac{t^2}{2!}\sum_y y^2 p(y) + \\
& \frac{t^3}{3!}\sum_y y^3 p(y) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\sum_y y^k p(y) + \cdots
\end{aligned}
$$

最後根據 pmf 的完整和爲 1, 以及 k 階動差的定義, 可由上式導出

$$
\begin{aligned}
& E(e^{tY}) \\
= \; & 1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \frac{t^3}{3!}\mu_3' + \cdots + \frac{t^k}{k!}\mu_k' + \cdots
\end{aligned}
$$

故, k 階動差 μ_k' 爲 $m(t)$ 的展開式中 $\frac{t^k}{k!}$ 的係數 $k = 1, 2, 3, \ldots$, 也就是說, 所有的 k 階動差均可壓縮在一個表示式 $m(t)$ 內, 並由其展開式可求出各個動差. 因此, 稱 $m(t) = E(e^{tY})$ 爲 Y 的動差母函數.

應用 1. (由 $m(t) = E(e^{tY})$ 生成 μ_k', k = 1, 2, 3, $\ldots$).

定理 3.12. 若 $m(t)$ 存在, 則對任意的正整數 k,

$$
\left.\frac{d^k m(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = m^{(k)}(0) = \mu_k'
$$

<證> 首先, 根據註解

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tY}) \\ &= 1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{2!}\mu_2' + \frac{t^3}{3!}\mu_3' + \cdots + \\ &\quad \frac{t^k}{k!}\mu_k' + \cdots \end{aligned}$$

接著根據一事實: 當 $m(t)$ 存在時, 微分與和可交換, 得

$$\begin{aligned} m^{(1)}(t) &= \mu_1' + \frac{2t}{2!}\mu_2' + \frac{3t^2}{3!}\mu_3' + \cdots + \\ &\quad \frac{kt^{k-1}}{k!}\mu_k' + \cdots \\ m^{(2)}(t) &= \mu_2' + \frac{2t}{2!}\mu_3' + \frac{3t^2}{3!}\mu_4' + \cdots + \\ &\quad \frac{(k-1)t^{k-2}}{(k-1)!}\mu_k' + \cdots \\ &\vdots \\ m^{(k)}(t) &= \mu_k' + \frac{2t}{2!}\mu_{k+1}' + \frac{3t^2}{3!}\mu_{k+2}' + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

最後一式子的第二項乃因為

$$\frac{(k+1)k(k-1)\ldots(2)t}{(k+1)!}\mu_{k+1}' = \frac{2t}{2!}\mu_{k+1}'$$

同理, 可導出其餘的各項.

代入 $t=0$, 得

$$\begin{aligned} m^{(1)}(0) &= \mu_1' \\ m^{(2)}(0) &= \mu_2' \\ &\vdots \\ m^{(k)}(0) &= \mu_k' \\ &\vdots \end{aligned}$$

例 1. 試求 $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 的 mgf $m(t)$.

<解> 根據 mgf 的定義,

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tY}) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \text{ (根據 } e^x \text{ 的泰勒展開式)} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)}, \ -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

例 2. 試以 $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 的 mgf $m(t)$ 求其期望值 μ 與變異數 σ^2.

<解> 根據一階動差的定義以及定理 3.12,

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1' = m^{(1)}(0)\\ &= \frac{d}{dt}\left[e^{\lambda(e^t-1)}\right]\Big|_{t=0}\\ &= \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0}\\ &= \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)}\\ &= \lambda(1)e^0 = \lambda\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \mu_2' = m^{(2)}(0)\\ &= \frac{d}{dt}\left[\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right]\Big|_{t=0}\\ &= (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0}\\ &= \lambda^2 + \lambda\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \mathrm{Var}(Y)\\ &= E(Y^2) - [E(Y)]^2\\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

應用 2. (唯一性). 若存在 $b > 0$ 使得對所有的

$|t| < b$, Y 與 Z 都有相同的動差母函數 $m(t)$, 則

$$Y \stackrel{\mathcal{D}}{=} Z$$

亦即, Y 與 Z 有相同的分布.

<證> (略), 參看高等機率論.

例 3. 設 Y 的動差母函數 mgf

$$m_Y(t) = e^{3.2(e^t - 1)}, \ -\infty < t < \infty$$

試求 Y 的分布.

<解> 因爲 Poisson(λ) 隨機變數的 mgf 爲

$$e^{\lambda(e^t - 1)}, \ -\infty < t < \infty$$

故, 根據唯一性,

$$Y \sim \text{Poisson}(3.2)$$