

單元 25: 連續隨機變數的期望值 (課本 §4.3)

定義 1. 設連續隨機變數 $Y \sim f(y)$, 則

$$E(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) dy < \infty$$

註. 若 Y : 離散 $\sim$ (pmf) $p(y)$, 則

$$E(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_y y p(y)$$

與上式在型式上一致, 因為在 y 附近的機率為

$$f(y) dy$$

且積分由和演變而來, 故

$$\sum_y y p(y) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

定理 4.4. 設連續隨機變數 $Y \sim f(y)$ (pdf), 且 $g(Y)$ 為 Y 的函數, 則

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy$$

當積分存在時.

<證> (略) 與定理 3.2 的證明類似.

定理 4.5. 設 c 為一常數且 $g(Y)$, $g_1(Y)$, $g_2(Y)$, $\dots$, $g_k(Y)$ 為 $Y \sim f(y)$ 的函數, 則下列各式成立:

(1) 常數的期望值等於常數本身:

$$E(c) = c$$

(2) 純量乘積的期望值等於純量與期望值的乘積:

$$E[cg(Y)] = cE[g(Y)]$$

(3) 和的期望值等於期望值的和:

$$\begin{aligned} &E[g_1(Y) + g_2(Y) + \dots + g_k(Y)] \\ &= E[g_1(Y)] + E[g_2(Y)] + \dots + E[g_k(Y)] \end{aligned}$$

註 1. 定理 4.5 的 (2) 與 (3) 合併成期望值的線性性 (linearity), 亦即, 對任意的常數 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 以及任

意的 Y 的函數 $g_1(Y), g_2(Y), \dots, g_k(Y)$,

$$\begin{aligned} E[c_1 g_1(Y) + c_2 g_2(Y) + \dots + c_k g_k(Y)] \\ = c_1 E[g_1(Y)] + c_2 E[g_2(Y)] + \dots \\ + c_k E[g_k(Y)] \end{aligned}$$

也就是說, 線性組合的期望值等於對應的期望值的線性組合.

註 2. 與離散情況一樣,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &\stackrel{\text{def}}{=} E[(Y - \mu)^2] \\ &= E[Y^2 - 2Y\mu + \mu^2] \\ &= E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2 \quad (\text{定理 4.5}) \\ &= E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(Y^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

例 1. 設

$$Y \sim f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $E(Y)$ 與 $\text{Var}(Y)$.

<解> 首先根據期望值的定義,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

接著根據 pdf $f(y)$ 的不同表示式, 將在整個實數線上的積分分割成 3 個區間上的積分, 而得

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^2 y \cdot \frac{3}{8} y^2 dy + \int_2^{\infty} 0 dy \\ &= 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^2 + 0 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} (16) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

又根據隨機變數的函數的期望值公式以及同樣的分割,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy \\ &= \int_0^2 y^2 \frac{3}{8} y^2 dy \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} y^5 \Big|_0^2 \\ &= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} (32) = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

故,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{48 - 45}{20} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$