

單元 31: 其他的期望值

(課本 §4.9)

連續隨機變數的動差的定義是類似於離散的情況. 正式定義如下:

定義 1. 設 Y 為一連續隨機變數. 則 Y 的以原點為中心的 k 階動差 (k th moment)

$$\mu'_k \stackrel{\text{def}}{=} E(Y^k), k = 1, 2, \dots$$

且其以期望值為中心的 k 階動差, 又稱作 k 階中央動差 (k th central moment)

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} E[(Y - \mu)^k], k = 1, 2, \dots$$

例 1. 設 $Y \sim \text{unif}(0, \theta)$, 試求 μ'_k .

<解> 根據 k 階動差的定義, 以及隨機變數函數的期望值的公式,

$$\begin{aligned}\mu'_k &= E(Y^k) = \int_0^\theta y^k \frac{1}{\theta} dy \\ &= \frac{1}{\theta(k+1)} y^{k+1} \Big|_0^\theta \\ &= \frac{\theta^k}{k+1}\end{aligned}$$

故代入不同的 k 值, 得不同的 k 階動差, 如

$$\mu'_1 = \frac{\theta}{2}, \mu'_2 = \frac{\theta^2}{3}, \mu'_3 = \frac{\theta^3}{4}, \dots$$

定義 2. 設 Y 爲一連續隨機變數, 則 Y 的動差母函數 (moment-generating function, mgf)

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(e^{tY})$$

若存在一常數 $b > 0$ 使得當 $|t| \leq b$ 時, $m(t)$ 有限, 則稱動差母函數 $m(t)$ 存在.

註. 若動差母函數 $m(t)$ 存在, 則

$$\begin{aligned} m(t) = 1 + \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \\ + \mu'_k \frac{t^k}{k!} + \dots \end{aligned}$$

且

$$\left. \frac{d^k m(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = \mu'_k$$

<證> 首先, 根據動差母函數 (mgf) 的定義以及指數函

數的泰勒展開式,

$$\begin{aligned}
 m(t) &= E(e^{tY}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f(y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + ty + \frac{t^2}{2!} y^2 + \frac{t^3}{3!} y^3 + \cdots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t^k}{k!} y^k + \cdots \right) f(y) dy \quad (1)
 \end{aligned}$$

接著, 在 $m(t)$ 存在的條件下, 無窮項的和與積分可交換, 亦即, 可逐項積分, 而由 (1) 式得出

$$\begin{aligned}
 m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy + t \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy + \\
 &\quad \frac{t^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy + \frac{t^3}{3!} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f(y) dy + \\
 &\quad \cdots + \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y) dy + \cdots \quad (2)
 \end{aligned}$$

最後, 根據機率密度函數的性質以及 k 階動差的定義, 由 (2) 式, 得

$$\begin{aligned}
 m(t) &= 1 + \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \\
 &\quad + \mu'_k \frac{t^k}{k!} + \cdots \quad (3)
 \end{aligned}$$

與離散情況有相同的型式，亦即， k 階動差為 $\frac{t^k}{k!}$ 的係數。因此，在 $m(t)$ 存在的條件下，經由逐項微分 (3) 式，可得

$$\left. \frac{d^k m(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = \mu'_k$$

例 2. 設 $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$. 試求 Y 的 $m(t)$ 並展開 $m(t)$ 以求 μ'_k .

<解> (1) 求 $m(t)$. 根據動差母函數的定義，

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tY}) \\ &= \int_0^\infty e^{ty} \cdot \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y\left(\frac{1}{\beta}-t\right)} dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)} dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

其中第五個等號成立乃因為 $\Gamma(\alpha)$ 的定義以及變數變換 $u = y/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)$, $t < 1/\beta$ 所致，詳述如下。當

$t < 1/\beta$ 時, $\beta/(1 - \beta t) > 0$, 故令 $u = y / \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)$, 第四個等號右邊的積分

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)} dy \\
 &= \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta/(1-\beta t)}\right)^{\alpha-1} \cdot \\
 & \quad e^{-y/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)} \frac{1}{\beta/(1-\beta t)} dy \\
 &= \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \\
 &= \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \Gamma(\alpha)
 \end{aligned}$$

或者由 pdf 的角度, 若 pdf $f(y) = c \cdot g(y)$, 其中 c 稱為 $f(y)$ 的常數因式 (constant factor), $g(y)$ 稱為 $f(y)$ 的變數因式 (variable factor), 則

$$\int_{-\infty}^\infty f(y) dy = \int_{-\infty}^\infty c g(y) dy = 1$$

由此導出

$$\int_{-\infty}^\infty g(y) dy = \frac{1}{c} \quad (4)$$

亦即, pdf 變數因式的積分等於常數因式的倒數。又當

$$\frac{\beta}{1-\beta t} > 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{\beta}$$

時,

$$y^{\alpha-1} e^{-y/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)}$$

爲 gamma $\left(\alpha, \frac{\beta}{1-\beta t}\right)$ 的 pdf 的變數因式, 且其常數因式爲

$$\frac{1}{\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

故由 (4) 式, 第五個等號成立.

(2) 根據負次方的二項展開式,

$$\begin{aligned} m(t) &= (1 - \beta t)^{-\alpha} \\ &= 1 + (-\alpha)(-\beta t)(1)^{-\alpha-1} + \\ &\quad \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)}{2!}(-\beta t)^2(1)^{-\alpha-2} + \\ &\quad \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)}{3!}(-\beta t)^3(1)^{-\alpha-3} + \\ &\quad \dots + \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-k+1)}{k!} \\ &\quad (-\beta t)^k(1)^{-\alpha-k} + \dots \end{aligned}$$

接著由上式的第二項開始, 可觀察出 α 前的負號個數剛好等於 β 前的負號個數, 故將所有的負號提出並相乘後剛好

爲 1, 經整理後, 可得

$$\begin{aligned} m(t) &= (1 - \beta t)^{-\alpha} \\ &= 1 + t(\alpha\beta) + \frac{t^2}{2!}[\alpha(\alpha + 1)\beta^2] + \\ &\quad \frac{t^3}{3!}[\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta^3] + \cdots + \\ &\quad \frac{t^k}{k!}[\alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k - 1)\beta^k] + \cdots \end{aligned}$$

又對於 $k = 1, 2, \dots$, μ'_k 爲 $\frac{t^k}{k!}$ 的係數, 故

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \alpha\beta \\ \mu'_2 &= \alpha(\alpha + 1)\beta^2 \\ \mu'_3 &= \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\beta^3 \\ &\vdots \\ \mu'_k &= \alpha(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k - 1)\beta^k \\ &\vdots \end{aligned}$$

定理 4.12. 令連續隨機變數 $Y \sim f(y)$ 且 $g(Y)$ 爲一 Y 的函數, 則 $g(Y)$ 的 mgf

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[e^{tg(Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tg(y)} f(y) dy$$

其中第二個等號成立乃根據隨機變數函數的期望值公式.

例 3. 令 $Y \sim N(\mu, \sigma)$. 試求 $g(Y) \stackrel{\text{def}}{=} Y - \mu$ 的 mgf.

<解> 根據定理 4.12, $g(Y)$ 的 mgf

$$\begin{aligned} m(t) &= E[e^{tg(Y)}] \\ &= E[e^{t(Y-\mu)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(y-\mu)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \end{aligned}$$

接著經由變數變換, 令

$$u = y - \mu, \quad du = dy$$

以及

$$y = -\infty \Rightarrow u = -\infty, \quad y = \infty \Rightarrow u = \infty$$

由上式可得

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u^2 - 2\sigma^2 tu)} du \quad (5) \end{aligned}$$

然後經由一個處理常態分布函數 pdf 相關積分的典型技巧, 亦即, 將指數函數的指數部分對積分變數 u 作完全平方, 得

$$u^2 - 2\sigma^2 tu = (u - \sigma^2 t)^2 - (\sigma^2 t)^2 \quad (6)$$

因此, 由 (5) 式 及 (6) 式, 得

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sigma^2t)^2} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^2t)^2} du \\ &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sigma^2t)^2} du \\ &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2t^2} (1), \quad -\infty < t < \infty \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right) \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃因為第二個等號右邊的被積函數剛好是 $N(\sigma^2t, \sigma)$ 的 pdf, 而得完整的積分為 1 所致.

註. (唯一性). 若 Y, Z 為二連續隨機變數且有相同的 mgf, 則

$$Y \stackrel{\mathcal{D}}{=} Z$$

與離散的情況一樣.