

## 單元 36: 獨立隨機變數

(課本 §5.4)

定義. 二隨機變數  $Y_1, Y_2$  相互獨立 (mutually independent) 若且爲若對任意的  $a < b, c < d$ ,

$$\begin{aligned} P(a \leq Y_1 \leq b, c \leq Y_2 \leq d) \\ = P(a \leq Y_1 \leq b)P(c \leq Y_2 \leq d) \end{aligned}$$

此定義相當於如下的定義 (以 cdf 的角度來看):

定義. 設

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{joint cdf } F(y_1, y_2)$$

且

$$Y_1 \sim F_1(y_1) \text{ 與 } Y_2 \sim F_2(y_2)$$

則  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立若且爲若對任意的  $(y_1, y_2)$ ,

$$F(y_1, y_2) = F_1(y_1)F_2(y_2)$$

否則, 稱  $Y_1, Y_2$  爲不獨立 (dependent).

亦可由 pmf 與 pdf 的角度判斷獨立與否, 如下述的定理.

## 定理 5.4. 設

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{joint pmf } p(y_1, y_2)$$

且  $Y_1$  與  $Y_2$  的 marginal pmf 分別為  $p_1(y_1)$  與  $p_2(y_2)$ . 則  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立若且為若對任意的  $(y_1, y_2)$ ,

$$p(y_1, y_2) = p_1(y_1)p_2(y_2)$$

設

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{joint pdf } f(y_1, y_2)$$

且  $Y_1$  與  $Y_2$  的 marginal pdf 分別為  $f_1(y_1)$  與  $f_2(y_2)$ . 則  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立若且為若對任意的  $(y_1, y_2)$ ,

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$$

例 1. 承接 §5.3 中委員會的例子, 其中 joint pmf  $p(y_1, y_2)$  如下:

|       | $y_1$ |      |      |       |
|-------|-------|------|------|-------|
| $y_2$ | 0     | 1    | 2    | Total |
| 0     | 0     | 3/15 | 3/15 | 6/15  |
| 1     | 2/15  | 6/15 | 0    | 8/15  |
| 2     | 1/15  | 0    | 0    | 1/15  |
| Total | 3/15  | 9/15 | 3/15 |       |

因爲

$$p(0, 0) = 0$$

且

$$p_1(0) = 3/15, p_2(0) = 6/15$$

所以

$$p(0, 0) \neq p_1(0)p_2(0)$$

而得  $Y_1$  與  $Y_2$  不相互獨立.

例 2. 設  $Y_1$  與  $Y_2$  的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6y_1y_2^2, & 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立.

<證> 首先, 可觀察出 joint pdf  $f(y_1, y_2)$  在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

上取值  $6y_1y_2^2$ , 其它地方取值 0, 如圖所示.

接著可根據上述的觀察以及 marginal pdf 定義, 分別求出  $Y_1$  與  $Y_2$  的 marginal pdf, 並以定理 5.4 所述

的 pdf 角度判斷出獨立性. 對於  $0 \leq y_1 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^1 6y_1 y_2^2 dy_2 \\ &= 6y_1 \cdot \frac{1}{3} y_2^3 \Big|_{y_2=0}^1 = 2y_1 \end{aligned}$$

當  $y_1 < 0$  或  $y_1 > 1$  時,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此, 綜合上述,  $Y_1$  的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

同理, 對於  $0 \leq y_2 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_0^1 6y_1 y_2^2 dy_1 \\ &= y_2^2 \cdot 3y_1^2 \Big|_{y_1=0}^1 = 3y_2^2 \end{aligned}$$

對於  $y_2 < 0$  或  $y_2 > 1$ ,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

所以, 合併上二式, 得  $Y_2$  的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 3y_2^2, & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2)$$

最後, 由 (1) 式及 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} & f_1(y_1)f_2(y_2) \\ &= \begin{cases} (2y_1)(3y_2^2) = 6y_1y_2^2, & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ (2y_1)(0) \text{ 或 } (0)(3y_2^2) \\ \text{或 } (0)(0) = 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

故,  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立.

例 3. 設  $(Y_1, Y_2)$  的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證  $Y_1$  與  $Y_2$  不獨立.

<證> 因爲 joint pdf  $f(y_1, y_2)$  僅在區域

$$R: \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

上爲正且取值爲 2, 如圖示, 故對於  $0 \leq y_1 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^{y_1} 2 dy_2 \\ &= 2y_2 \Big|_{y_2=0}^{y_1} = 2y_1 \end{aligned}$$

又當  $y_1 < 0$  或  $y_1 > 1$  時,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此, 合併上述二式, 得  $Y_1$  的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

同理, 因爲區域  $R$  亦可以水平方式表示成

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 1 \\ y_2 \leq y_1 \leq 1 \end{cases}$$

如圖示, 故對於  $0 \leq y_2 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{y_2}^1 2 dy_1 \\ &= 2y_1 \Big|_{y_1=y_2}^1 = 2(1 - y_2) \end{aligned}$$

又對於  $y_2 < 0$  或  $y_2 > 1$ ,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

所以,  $Y_2$  的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 2(1 - y_2), & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4)$$

接著, 當  $0 < y_1 \leq y_2 < 1$  時, 亦即, 在區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 < y_1 < 1 \\ y_1 \leq y_2 < 1 \end{cases}$$

上, 如圖示, 由 (3) 式與 (4) 式, 可得

$$f_1(y_1)f_2(y_2) = (2y_1)(2(1 - y_2)) \neq 0$$

然而在同樣的區域  $R_1$  上, 卻得出

$$f(y_1, y_2) = 0$$

故,  $Y_1$  與  $Y_2$  不獨立.

註. (1) 在例 3 中, 求  $f_1(y_1)$  時,  $y_2$  的積分極限與  $y_1$  有關; 求  $f_2(y_2)$  時,  $y_1$  的積分極限與  $y_2$  有關, 這是導致不獨立的原因.

(2) 例 2 中, 求  $f_1(y_1)$  與  $f_2(y_2)$  時, 積分極限均為常數, 而不受  $y_1$  與  $y_2$  的影響, 故相互獨立.

定理 5.5. 設  $(Y_1, Y_2)$  的 joint pdf  $f(y_1, y_2)$  僅在區域

$$R: \begin{cases} a \leq y_1 \leq b \\ c \leq y_2 \leq d \end{cases}$$

上取正值, 其中  $a, b, c, d$  均為常數, 且在其它地方的取值為 0. 則  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立若且為若

$$f(y_1, y_2) = g(y_1)h(y_2)$$

其中  $g(y_1)$  僅為  $y_1$  的非負函數,  $h(y_2)$  僅為  $y_2$  的非負函數.

<證> 略.

註. 定理 5.5 的優點: 不要求出 marginal pdf, 只要能將  $f(y_1, y_2)$  分解成一個純  $y_1$  的函數 (不單在數學式子上, 亦包括了定義域) 與一個純  $y_2$  的函數的乘積即可, 甚至此二函數亦不需要為 pdf.

例 4. 設  $(Y_1, Y_2)$  的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立.

<證> 因爲  $f(y_1, y_2)$  僅在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

上爲正 ( $R$  的邊界爲常數) 且令

$$g(y_1) = \begin{cases} y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

與

$$h(y_2) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

可得

$$\begin{aligned} & g(y_1)h(y_2) \\ &= \begin{cases} (y_1)(2) = 2y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ (y_1)(0) \text{ 或 } (0)(2) \\ \text{或 } (0)(0) = 0, & \text{其它} \end{cases} \\ &= f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

因此, 由定理 5.5,  $Y_1$  與  $Y_2$  相互獨立, 雖然  $g(y_1)$  與  $h(y_2)$  均不是 pdf.

例 5. 設  $(Y_1, Y_2)$  的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試證  $Y_1$  與  $Y_2$  不相互獨立.

<證> 因為  $f(y_1, y_2)$  僅在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

上為正, 但  $R$  的邊界不為常數, 亦即, 不存在常數  $a, b, c, d$  使得  $f(y_1, y_2)$  在邊界為常數的方形區域

$$R : \begin{cases} a \leq y_1 \leq b \\ c \leq y_2 \leq d \end{cases}$$

上為正, 不符合定理 5.5 的條件, 故不能用定理 5.5 來判斷是否獨立, 隨然  $f(y_1, y_2)$  在數學式子上與前例的情況一樣, 均為 (一常數)·(一變數). 因此, 需要根據定理 5.4 以 pdf 的角度來處理.

首先, 對於  $0 \leq y_1 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^{y_1} 3y_1 dy_2 \\ &= 3y_1 y_2 \Big|_{y_2=0}^{y_1} = 3y_1^2 \end{aligned}$$

同時對於  $y_1 < 0$  或  $y_1 > 1$ ,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此,  $Y_1$  的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 3y_1^2, & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

同理, 因為區域  $R$  亦可以水平方式表示成

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 1 \\ y_2 \leq y_1 \leq 1 \end{cases}$$

如圖示, 故對於  $0 \leq y_2 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{y_2}^1 3y_1 dy_1 \\ &= \left. \frac{3}{2} y_1^2 \right|_{y_1=y_2}^1 = \frac{3}{2} (1 - y_2^2) \end{aligned}$$

又對於  $y_2 < 0$  或  $y_2 > 1$ ,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

所以,  $Y_2$  的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - y_2^2), & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

最後, 當  $0 < y_1 \leq y_2 < 1$ , 亦即, 在區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 < y_1 < 1 \\ y_1 \leq y_2 < 1 \end{cases}$$

上, 如圖示, 由 (5) 式及 (6) 式, 可得

$$f_1(y_1)f_2(y_2) = (3y_1^2) \left( \frac{3}{2}(1 - y_2^2) \right) \neq 0$$

但在同樣的區域  $R_1$  上, 卻得出

$$f(y_1, y_2) = 0$$

故,  $Y_1$  與  $Y_2$  不相互獨立.

註. 推廣: 設

$$Y_1 \sim F_1(y_1), Y_2 \sim F_2(y_2), \dots, Y_n \sim F_n(y_n)$$

且

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \sim F(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

則

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

相互獨立若且爲若對所有的  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = F_1(y_1)F_2(y_2) \cdots F_n(y_n)$$

亦即, joint cdf 等於各自 cdf 的乘積; 亦相當於對於所有的  $(y_1, y_2, \dots, y_2)$ ,

$$p(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_1(y_1)p_2(y_2) \cdots p_n(y_n)$$

(離散情況) 亦即, joint pmf 等於各自 pmf 的乘積;  
或對所有的  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f_1(y_1)f_2(y_2) \cdots f_n(y_n)$$

(連續情況), 亦即, joint pdf 等於各自 pdf 的乘積.