

單元 37: 隨機變數的函數的期望值 (課本 §5.5)

定義. 設聯合離散隨機變數

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \sim p(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

且

$$g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$$

為 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ 的一函數. 則

$$\begin{aligned} E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)] \\ = \sum_{y_k} \cdots \sum_{y_2} \sum_{y_1} g(y_1, y_2, \dots, y_k) \cdot \\ p(y_1, y_2, \dots, y_k) \end{aligned}$$

若聯合連續隨機變數

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \sim f(y_1, y_2, \dots, y_k)$$

則

$$\begin{aligned} E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)] \\ = \int_{y_k} \cdots \int_{y_2} \int_{y_1} g(y_1, y_2, \dots, y_k) \cdot \\ f(y_1, y_2, \dots, y_k) dy_1 dy_2 \cdots dy_k \end{aligned}$$

註. “多變量隨機變數的函數的期望值定義” 與 “單變量隨機變數的函數的期望值定義” 是一致的, 例如, 若

$$(Y_1, Y_2) \sim f(y_1, y_2)$$

且

$$g(Y_1, Y_2) = Y_1$$

則

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= E[g(Y_1, Y_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2) f(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \right] dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f_1(y_1) dy_1 \\ &= E(Y_1) \end{aligned}$$

其中第二個等號乃根據多變量的定義, 倒數第二個等號是由於 Y_1 的 marginal pdf 的定義, 最後一個等號乃是單變量的定義.

例 1. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $E(Y_1Y_2)$, $E(Y_1)$, $E(Y_2)$, 與 $\text{Var}(Y_1)$.

<解> (1) 根據多變量隨機變數函數的期望值公式, 以及 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 僅在單位正方形上取值 $2y_1$, 其它地方取值為 0 下,

$$\begin{aligned} E(Y_1Y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1y_2 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 y_1y_2(2y_1) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 y_2 \left[\frac{2}{3}y_1^3 \Big|_{y_1=0}^1 \right] dy_2 \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}y_2 dy_2 \\ &= \frac{1}{3}y_2^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(2) 因為 $Y_1 = g(Y_1, Y_2)$, 其中 $g(y_1, y_2) = y_1$, 故與 (1) 相同的理由,

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 y_1(2y_1) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}y_1^3 \Big|_{y_1=0}^1 \right] dy_2 \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} dy_2 = \frac{2}{3}y_2 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(3) 同 (2),

$$\begin{aligned} E(Y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_2 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 y_2 (2y_1) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 y_2 \left[y_1^2 \Big|_{y_1=0}^1 \right] dy_2 \\ &= \int_0^1 y_2 dy_2 = \frac{1}{2} y_2^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4) 先求 Y_1 的二階動差, 同 (1), 得

$$\begin{aligned} E(Y_1^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 y_1^2 (2y_1) dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{4} y_1^4 \Big|_{y_1=0}^1 \right] dy_2 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dy_2 = \frac{1}{2} y_2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此, 根據變異數的公式,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_1) &= E(Y_1^2) - [E(Y_1)]^2 \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

例 2. 設生產化學物的過程中會產生兩種雜質. 針對一特定樣本, 令 Y_1 = 樣本中的雜質比率 (涵蓋兩種雜質), 且 Y_2 = 第一種雜質在全部雜質中所佔的比率. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2(1 - y_1), & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求第一種雜質在樣本中所佔比率的平均值.

<解> 根據題意, 第一種雜質在樣本中所佔的比率等於

$$Y_1 Y_2$$

故其平均值

$$\begin{aligned} E(Y_1 Y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 f(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 y_1 y_2 \cdot 2(1 - y_1) dy_2 dy_1 \\ &= \int_0^1 y_1 (1 - y_1) \left[y_2^2 \Big|_{y_2=0}^1 \right] dy_1 \\ &= \int_0^1 (y_1 - y_1^2) dy_1 \\ &= \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{3} y_1^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

因此, 預期樣本中會有 $1/6$ 是由第一種雜質所組成.