單元 38: 特別的定理
(課本 §5.6)

定理 5.6. 令 c 爲一常數. 則

$$E(c) = c$$

定理 5.7. 設 $g(Y_1, Y_2)$ 爲隨機變數 Y_1 與 Y_2 的一函數且 c 爲一常數. 則

$$E[cg(Y_1, Y_2)] = cE[g(Y_1, Y_2)]$$

定理 5.8. 設

$$g_1(Y_1, Y_2),\ g_2(Y_1, Y_2),\ \ldots,\ g_k(Y_1, Y_2)$$

爲隨機變數 Y_1 與 Y_2 的函數. 則

$$\begin{aligned} &E[g_1(Y_1, Y_2) + g_2(Y_1, Y_2) + \cdots + g_k(Y_1, Y_2)] \\ &= E[g_1(Y_1, Y_2)] + E[g_2(Y_1, Y_2)] + \cdots + \\ &\qquad E[g_k(Y_1, Y_2)] \end{aligned}$$

例 1. 承接石油庫存與銷售的例子. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \le y_2 \le y_1 \le 1 \\ 其它 \end{cases}$$

則 $Y_1 - Y_2$ 爲剩下石油的比率. 試求 $E(Y_1 - Y_2)$.

<解> 設

$$g_1(Y_1, Y_2) = Y_1,\ g_2(Y_1, Y_2) = -Y_2$$

則

$$\begin{aligned}
E(Y_1 - Y_2) &= E[g_1(Y_1, Y_2) + g_2(Y_1, Y_2)] \\
&= E[g_1(Y_1, Y_2)] + E[g_2(Y_1, Y_2)] \\
&= E(Y_1) + E(-Y_2) \\
&= E(Y_1) + (-1)E(Y_2) \\
&= E(Y_1) - E(Y_2) \qquad (1)
\end{aligned}$$

接著, 因爲 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le y_1 \end{cases}$$

上取值 $3y_1$, 其它的地方爲 0, 故根據隨機變數函數的期望值公式,

$$\begin{aligned}
E(Y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 f(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{y_1} y_1(3y_1)\,dy_2 dy_1 \\
&= \int_0^1 \left[3y_1^2 y_2 \Big|_{y_2=0}^{y_1} \right] dy_1 \\
&= \int_0^1 3y_1^3\,dy_1 = \frac{3}{4} y_1^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} E(Y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_2 f(y_1,y_2)dy_1dy_2 \\ &= \int_0^1\int_0^{y_1} y_2(3y_1)dy_2dy_1 \\ &= \int_0^1 3y_1\left[\frac{1}{2}y_2^2\Big|_{y_2=0}^{y_1}\right]dy_1 \\ &= \int_0^1 \frac{3}{2}y_1^3dy_1 = \frac{3}{8}y_1^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

最後, 根據 (1) 式及上述所求得的 Y_1 與 Y_2 的期望值,

$$E(Y_1-Y_2) = \frac{3}{4}-\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

<另解> 直接將 Y_1-Y_2 視爲一隨機變數的函數, 則根據隨機變數函數的期望值公式, 得

$$\begin{aligned} &E(Y_1-Y_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-y_2)f(y_1,y_2)dy_1dy_2 \\ &= \int_0^1\int_0^{y_1}(y_1-y_2)(3y_1)dy_2dy_1 \\ &= \int_0^1 3y_1\left[y_1y_2-\frac{1}{2}y_2^2\Big|_{y_2=0}^{y_1}\right]dy_1 \\ &= \int_0^1 3y_1\cdot\frac{1}{2}y_1^2dy_1 = \frac{3}{8}y_1^4\Big|_0^1 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

當隨機變數相互獨立時, 可化簡求乘積的期望值的步驟, 如下定理所述.

定理 5.9. 設 Y_1 與 Y_2 為相互獨立的隨機變數, 且 $g(Y_1)$ 與 $h(Y_2)$ 僅分別為 Y_1 與 Y_2 的函數. 則當期望值存在時,

$$E[g(Y_1)h(Y_2)] = E[g(Y_1)]E[h(Y_2)]$$

<證> 設 $(Y_1, Y_2) \sim f(y_1, y_2)$. 又可視乘積 $g(Y_1)h(Y_2)$ 為 Y_1 與 Y_2 的函數, 故根據隨機變數函數的期望值公式,

$$\begin{aligned} & E[g(Y_1)h(Y_2)] \\ & \quad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(y_1)h(y_2)f(y_1, y_2)dy_2dy_1 \end{aligned}$$

因為獨立性, 故

$$f(y_1, y_2) = f_1(y_1)f_2(y_2)$$

因而上式相當於

$$\begin{aligned} & E[g(Y_1)h(Y_2)] \\ & = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(y_1)h(y_2)f_1(y_1)f_2(y_2)dy_2dy_1 \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1)f_1(y_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(y_2)f_2(y_2)dy_2\right]dy_1 \end{aligned}$$

接著, 因爲上式被積函數內中括號的部分爲隨機變數 Y_2 的函數值 $h(y_2)$ 與 Y_2 的 marginal pdf $f_2(y_2)$ 的乘積積分, 故根據隨機變數函數的期望值公式, 中括號部分爲 $h(Y_2)$ 的期望值 $E[h(Y_2)]$, 乃一常數, 而得

$$
\begin{aligned}
&E[g(Y_1)h(Y_2)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1)f_1(y_1)E[h(Y_2)]dy_1 \\
&= E[h(Y_2)]\int_{-\infty}^{\infty} g(y_1)f_1(y_1)dy_1 \\
&= E[g(Y_1)]E[h(Y_2)]
\end{aligned}
$$

其中最後一個等號成立乃因爲被積函數爲隨機變數 Y_1 的函數值 $g(y_1)$ 與 Y_1 的 marginal pdf $f_1(y_1)$ 的乘積, 因而等於 $g(Y_1)$ 的期望值所致.

例 2. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$
f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2(1-y_1), & 0 \le y_1 \le 1, \\ & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
$$

曾於單元 37 (§5.5) 中, 以雙變數隨機變數函數的期望值公式直接求得

$$
E(Y_1Y_2) = \frac{1}{6}
$$

今以獨立性的角度另解如下.

<另解> 因爲 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在邊界爲常數的區域

$$R: \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

上取值 $2(1-y_1)$, 其它地方的取值爲 0, 且令

$$g(y_1) = \begin{cases} 1-y_1, & 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

與

$$h(y_2) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

可得對於所有的 (y_1, y_2),

$$\begin{aligned} & g(y_1)h(y_2) \\ = & \begin{cases} (1-y_1)(2) = 2(1-y_1), & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ (1-y_1)(0) \text{ 或 } (0)(2), & \\ \text{或 } (0)(0) = 0, & \text{其它} \end{cases} \\ = & f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

因此, Y_1 與 Y_2 相互獨立. 接著, 對於 $0 \leq y_1 \leq 1$,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_0^1 2(1-y_1)dy_2 \\ &= 2(1-y_1)y_2\Big|_{y_2=0}^1 = 2(1-y_1) \end{aligned}$$

又對於 $y_1 < 0$ 或 $y_1 > 1$,

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0$$

因此, Y_1 的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 2(1-y_1), & 0 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

同理, 對於 $0 \le y_2 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_0^1 2(1-y_1) dy_1 \\ &= -(1-y_1)^2 \Big|_{y_1=0}^{1} = 1 \end{aligned}$$

以及當 $y_2 < 0$ 或 $y_2 > 1$ 時,

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

得 Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 1, & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

亦即, $Y_2 \sim \text{unif}(0,1)$. 所以,

$$\begin{aligned} E(Y_1) &= \int_0^1 y_1[2(1-y_1)] dy_1 \\ &= y_1^2 - \frac{2}{3} y_1^3 \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

以及

$$E(Y_2) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

因此, 根據獨立性,

$$E(Y_1 Y_2) = E(Y_1)E(Y_2) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

與直接求得的結果一致.