單元 42: 雙變量常態分佈
(課本 §5.10)

現代統計理論的一基石爲多變量常態分佈, 爲簡單計, 僅介紹雙變量常態分佈, 定義如下.

定義. 雙變量隨機變數

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{bivariate } N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$$

若且爲若 Y_1 與 Y_2 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-Q/2}$$

其中

$$-\infty < y_1 < \infty, \ -\infty < y_2 < \infty$$

且

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(y_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \cdot \frac{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

註 1. 五種參數 μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, 與 ρ 的符號表示法不是巧合, 而是代表了實際上的意義, 如下述.

(1) 兩種邊際分布:

$$Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$$

與

$$Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$

(2) 共變異數

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$$

亦即, Y_1 與 Y_2 的相關係數

$$\rho = \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

註 2. 若共變異數 $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ (亦相當於 $\rho = 0$), 則 Y_1 與 Y_2 的 joint pdf

$$\begin{aligned}
&f(y_1, y_2) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(y_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\
&= g(y_1) \cdot h(y_2)
\end{aligned}$$

其中 $-\infty < y_1 < \infty$, $-\infty < y_2 < \infty$, 亦即, 可表成純 y_1 的非負函數與純 y_2 的非負函數的乘積. 因此, 由定理 5.5, 得 Y_1 與 Y_2 相互獨立.

註 3. 一般而言,

“共變異數等於 0” 無法導出 “獨立性”

但

“獨立性” 可保證 “共變異數等於 0”

然而由註 2 得知, 若 Y_1 與 Y_2 為雙變數常態分布, 則

$$Y_1 \text{ 與 } Y_2 \text{ 相互獨立} \Leftrightarrow \text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$$