

單元 46: 分布函數法

(課本 §6.3)

一. 單變量

設 $Y \sim f(y)$ 且 $U = g(Y)$ 爲一 Y 的函數. 則 U 的 cdf

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(g(Y) \leq u) \\ &= P(Y \in \{y : g(y) \leq u\}) \\ &= \int_{\{y: g(y) \leq u\}} f(y) dy \end{aligned}$$

接著, 由此可得 U 的 pdf

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u)$$

例 1. 設隨機變數 Y 的 pdf

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $U = 3Y - 1$ 的 pdf $f_U(u)$.

<解> (1) 求 cdf $F_U(u)$: 首先, 根據 cdf 的定義以及 U 的定義, 將新隨機變數 U 的 cdf 以原隨機變數 Y 表示, 可得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(3Y - 1 \leq u) \\ &= P\left(Y \leq \frac{u+1}{3}\right) \\ &= P\left(Y \in \left\{y : y \leq \frac{u+1}{3}\right\}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{(u+1)/3} f(y) dy \end{aligned}$$

再根據 Y 的 pdf $f(y)$ 在區間

$$I : 0 \leq y \leq 1$$

上取值 $2y$, 其它地方取值 0 , 可由上式的積分上界得出, 當 $\frac{u+1}{3} < 0$, 亦即, $u < -1$ 時,

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^{(u+1)/3} 0 dy = 0$$

當 $0 \leq \frac{u+1}{3} \leq 1$, 亦即, $-1 \leq u \leq 2$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{(u+1)/3} 2y dy \\ &= y^2 \Big|_0^{(u+1)/3} \\ &= \left(\frac{u+1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

當 $\frac{u+1}{3} > 1$, 亦即, $u > 2$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_{-\infty}^0 0dy + \int_0^1 2ydy + \int_1^{(u+1)/3} 0dy \\ &= y^2 \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

因此, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 cdf

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < -1 \\ \left(\frac{u+1}{3}\right)^2, & -1 \leq u \leq 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases}$$

且圖形如下.

註. $0 \leq Y \leq 1$ 相當於 $-1 \leq U = 3Y - 1 \leq 2$.

(2) 求 pdf $f_U(u)$: 根據 pdf 與 cdf 的關係, 得

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{9}(u+1), & -1 \leq u < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

註. 自行驗證在 $u = -1$ 時, $F_U(u)$ 是可微的且

$$F'_U(-1) = 0$$

二. 雙變量

設 $(Y_1, Y_2) \sim f(y_1, y_2)$ 且 $U = h(Y_1, Y_2)$, 乃一 Y_1 與 Y_2 的函數, 則 U 的 cdf

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(h(Y_1, Y_2) \leq u) \\ &= P((Y_1, Y_2) \in \{(y_1, y_2) : h(y_1, y_2) \leq u\}) \\ &= \iint_{\{(y_1, y_2) : h(y_1, y_2) \leq u\}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

接著, 由此可得 U 的 pdf

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u)$$

例 2. 設雙變量隨機變數 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 試求 $U = Y_1 - Y_2$ 的 pdf; (b) 試以 U 的 pdf 求 $E(U)$ ($=3/8$, 以前得到的答案).

<解> (a) 先求 $F_U(u)$: 根據 cdf 的定義以及 U 的定義, 將新隨機變數 U 的 cdf 以原隨機變數 Y_1 與 Y_2

表示, 得

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &= P(U \leq u) \\
 &= P(Y_1 - Y_2 \leq u) \\
 &= P((Y_1, Y_2) \in \{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \leq u\}) \\
 &= \iint_{\{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \leq u\}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2
 \end{aligned}$$

再根據 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq y_1 \end{cases}$$

上取值 $3y_1$, 其它地方取值 0, 以及上式中的積分區域

$$\{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \leq u\}$$

爲一斜率爲 1, 橫軸截距爲 u 的直線 $y_1 - y_2 = u$ 的左上方, 如圖示, 可得出, 當 $u < 0$ 時,

$$F_U(u) = \iint_{y_1 - y_2 \leq u} 0 dy_1 dy_2 = 0$$

當 $0 \leq u \leq 1$ 時,

$$\begin{aligned}
 F_U(u) &= \iint_{\{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \leq u\} \cap \bar{R}} 0 dy_1 dy_2 + \\
 &\quad \iint_{\{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \leq u\} \cap R} 3y_1 dy_1 dy_2 \\
 &= \iint_{\{(y_1, y_2) : y_1 - y_2 \leq u\} \cap R} 3y_1 dy_1 dy_2
 \end{aligned}$$

又根據圖示，上式相當於

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_R 3y_1 dy_1 dy_2 - \\ &\quad \iint_{\{u \leq y_1 - y_2 \leq 1\} \cap R} 3y_1 dy_1 dy_2 \\ &= 1 - \iint_{\{u \leq y_1 - y_2 \leq 1\} \cap R} 3y_1 dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

其中第二個等號右邊第一項的 1 乃是因為 $3y_1$ 在區域 R 上的積分剛好等於 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在整個平面上的完整積分，故為 1 所致；第二項的積分區域

$$\{u \leq y_1 - y_2 \leq 1\} \cap R$$

可表示成

$$\begin{cases} u \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq y_1 - u \end{cases}$$

因此，由上式可得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= 1 - \int_u^1 \int_0^{y_1-u} 3y_1 dy_2 dy_1 \\ &= 1 - \int_u^1 3y_1 \left[y_2 \Big|_{y_2=0}^{y_1-u} \right] dy_1 \\ &= 1 - \int_u^1 3y_1 (y_1 - u) dy_1 \\ &= 1 - \left(y_1^3 - \frac{3}{2} y_1^2 u \right) \Big|_u^1 \\ &= \frac{3}{2} u - \frac{1}{2} u^3 = \frac{1}{2} (3u - u^3) \end{aligned}$$

當 $u > 1$ 時, 由圖示, 得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{\{y_1 - y_2 \leq u\} \cap \bar{R}} 0 dy_1 dy_2 + \\ &\quad \iint_{\{y_1 - y_2 \leq u\} \cap R} 3y_1 dy_1 dy_2 \\ &= \iint_R 3y_1 dy_1 dy_2 = 1 \end{aligned}$$

故, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 cdf

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ \frac{1}{2}(3u - u^3), & 0 \leq u \leq 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

且圖形如下. 因此, U 的 pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - u^2), & 0 < u \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

其圖形如下.

(b) 根據期望值的定義, U 的期望值

$$\begin{aligned} E(U) &= \int_{-\infty}^{\infty} u f_U(u) du \\ &= \int_0^1 u \cdot \frac{3}{2}(1 - u^2) du \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

例 3. 設 Y_1 與 Y_2 為一大小為 $n = 2$ 的隨機樣本 (random sample), 且取自於分布為 $\text{unif}(0, 1)$ 的母體, 亦即,

$$Y_1, Y_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{unif}(0, 1)$$

試求 $U = Y_1 + Y_2$ 的 pdf.

<解> (1) 求 Y_1 與 Y_2 的 joint pdf $f(y_1, y_2)$: 因為 Y_1 與 Y_2 均為 $\text{unif}(0, 1)$ 分布, 亦即,

$$Y_i \sim f(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

且 Y_1 與 Y_2 相互獨立, 故

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= f(y_1)f(y_2) \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 求 $F_U(u)$: 根據 cdf 的定義以及 U 的定義, 將新隨機變數 U 的 cdf 以原隨機變數 Y_1 與 Y_2 表示, 得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(Y_1 + Y_2 \leq u) \\ &= P((Y_1, Y_2) \in \{(y_1, y_2) : y_1 + y_2 \leq u\}) \\ &= \iint_{\{(y_1, y_2) : y_1 + y_2 \leq u\}} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

再根據 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

上取值 1, 其它地方取值 0, 以及上式中的積分區域

$$\{(y_1, y_2) : y_1 + y_2 \leq u\}$$

爲一斜率爲 -1 , 縱軸截距爲 u 的直線 $y_1 + y_2 = u$ 的左下方, 如圖示, 可得出, 當 $u \leq 0$ 時,

$$F_U(u) = \iint_{y_1+y_2 \leq u} 0 dy_1 dy_2 = 0$$

當 $0 \leq u \leq 1$ 時,

$$F_U(u) = \iint_{\{y_1+y_2 \leq u\} \cap R} 1 dy_1 dy_2 \quad (1)$$

又上式中的積分區域

$$\{y_1 + y_2 \leq u\} \cap R$$

可表示成

$$R_1 : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq u \\ 0 \leq y_2 \leq u - y_1 \end{cases}$$

故, 在被積函數爲 1 的情況下, 由 (1) 式得

$$F_U(u) = R_1 \text{ 的面積} = \frac{1}{2}u^2$$

當 $1 < u \leq 2$ 時,

$$F_U(u) = \iint_{\{y_1+y_2 \leq u\} \cap R} 1 dy_1 dy_2 \quad (2)$$

其積分區域可表示成 $R_{21} \cup R_{22}$, 其中

$$R_{21} : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq u-1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

且

$$R_{22} : \begin{cases} u-1 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq u-y_1 \end{cases}$$

故, 在被積函數為 1 的情況下, 由 (2) 式得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= (R_{21} \cup R_{22}) \text{ 的面積} \\ &= 1 - R_2 \text{ 的面積} \end{aligned}$$

其中區域

$$R_2 : \begin{cases} u-1 \leq y_1 \leq 1 \\ u-y_1 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

乃一兩股長為 $(2-u)$ 的等腰直角三角形. 因此, 由上式得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= 1 - \frac{1}{2}(2-u)^2 \\ &= 1 - 2 + 2u - \frac{1}{2}u^2 \\ &= -\frac{1}{2}u^2 + 2u - 1 \end{aligned}$$

當 $u > 2$ 時, 由圖示, 得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{\{y_1+y_2 \leq u\} \cap \bar{R}} 0 dy_1 dy_2 + \\ &\quad \iint_{\{y_1+y_2 \leq u\} \cap R} 1 dy_1 dy_2 \\ &= \iint_R 1 dy_1 dy_2 = 1 \end{aligned}$$

故, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 cdf

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ \frac{1}{2}u^2, & 0 \leq u \leq 1 \\ -\frac{1}{2}u^2 + 2u - 1, & 1 < u \leq 2 \\ 1, & u > 2 \end{cases}$$

且圖形如下.

註. 除了以面積的角度計算外, 亦可直接積分 (1) 式與 (2) 式, 過程如下: 由 (1) 式及其積分區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq u \\ 0 \leq y_2 \leq u - y_1 \end{cases}$$

得, 當 $0 \leq u \leq 1$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_0^u \int_0^{u-y_1} 1 dy_2 dy_1 \\ &= \int_0^u (u - y_1) dy_1 \\ &= uy_1 - \frac{1}{2}y_1^2 \Big|_0^u = \frac{1}{2}u^2 \end{aligned}$$

由 (2) 式及其積分區域 $R_{21} \cup R_{22} = R \setminus R_2$, 其中

$$R_2 : \begin{cases} u - 1 \leq y_1 \leq 1 \\ u - y_1 \leq y_2 \leq 1 \end{cases}$$

可得, 當 $1 < u \leq 2$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_R 1 dy_1 dy_2 - \iint_{R_2} 1 dy_1 dy_2 \\ &= 1 - \int_{u-1}^1 \int_{u-y_1}^1 dy_2 dy_1 \\ &= 1 - \int_{u-1}^1 (1 - u + y_1) dy_1 \\ &= 1 - \left(y_1 - uy_1 + \frac{1}{2}y_1^2 \Big|_{y_1=u-1}^1 \right) \end{aligned}$$

將上式中的 y_1 代入積分上下界, 並整理化簡, 得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= 1 - \left[\left(1 - u + \frac{1}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(u - 1 - u^2 + u + \frac{1}{2}(u - 1)^2 \right) \right] \\ &= 1 - \left[1 - u + \frac{1}{2} - u + 1 + u^2 - u \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}u^2 + u - \frac{1}{2} \right] \\ &= 1 - \left[2 - 2u + \frac{1}{2}u^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2}u^2 + 2u - 1 \end{aligned}$$

與前述的結果一致.

(3) 求 $f_U(u)$: 根據 pdf 與 cdf 的關係, 新隨機變數 U 的 pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\ &= \begin{cases} u, & 0 \leq u \leq 1 \\ 2 - u, & 1 < u \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

且圖形如下.

三. 多變量 同理推廣, 設

$$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \sim f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

且

$$U = h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

乃一 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 的函數, 則 U 的 cdf

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq u) \\ &= P((Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in R) \\ &= \int \cdots \int_R f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \cdots dy_n \end{aligned}$$

其中區域

$$R : \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : h(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq u\}$$

接著, 由此可得 U 的 pdf

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u)$$

註. 設隨機變數 $Y \sim \text{pdf } f_Y(y)$ (或 cdf $F_Y(y)$) 且 $U = h(Y) = Y^2$. 則 U 的 cdf

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(Y^2 \leq u)$$

情況 1. $u < 0$:

$$\begin{aligned} P(Y^2 \leq u) &= P(Y \in \{y : y^2 \leq u\}) \\ &= P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

情況 2. $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} P(Y^2 \leq u) &= P(-\sqrt{u} \leq Y \leq \sqrt{u}) \\ &= P(Y \in \{y : -\sqrt{u} \leq y \leq \sqrt{u}\}) \\ &= \int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} f_Y(y) dy \\ &= F_Y(\sqrt{u}) - F_Y(-\sqrt{u}) \end{aligned}$$

如圖示. 合併情況 1 與情況 2, 得新隨機變數 U 的 cdf

$$F_U(u) = \begin{cases} F_Y(\sqrt{u}) - F_Y(-\sqrt{u}), & u \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因此, U 的 pdf

$$\begin{aligned}
 f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\
 &= \begin{cases} F'_Y(\sqrt{u})(\sqrt{u})' - \\ F'_Y(-\sqrt{u})(-\sqrt{u})', & u > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f_Y(\sqrt{u}) \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} \right) - \\ f_Y(-\sqrt{u}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{u}} \right), & u > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{u}} [f_Y(\sqrt{u}) + f_Y(-\sqrt{u})], & u > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
 \end{aligned}$$

例 4. 設隨機變數 Y 的 pdf

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y+1}{2}, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $U = Y^2$ 的 pdf.

<解> 由上面註解, 當 $u > 0$ 時, 新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} [f_Y(\sqrt{u}) + f_Y(-\sqrt{u})]$$

再根據原來的隨機變數 Y 的 pdf $f_Y(y)$ 在區間 $-1 \leq y \leq 1$ 上取值 $\frac{y+1}{2}$, 其它地方取值 0, 得出, 當

$0 < \sqrt{u} \leq 1$, 亦即, $0 < u \leq 1$ 時, $-1 \leq -\sqrt{u} < 0$ 以及

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \left[\frac{\sqrt{u} + 1}{2} + \frac{-\sqrt{u} + 1}{2} \right] = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

當 $\sqrt{u} > 1$, 亦即, $u > 1$ 時, $-\sqrt{u} \leq -1$ 以及

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} [0 + 0] = 0$$

綜合上述, 當 $u > 0$ 時, U 的 pdf

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{u}}, & 0 < u \leq 1 \\ 0, & u > 1 \end{cases} \quad (3)$$

當 $u \leq 0$ 時, 亦由上面的註解, 得

$$f_U(u) = 0 \quad (4)$$

最後, 合併 (3) 式與 (4) 式, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{u}}, & 0 < u \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例 5. 令 $U \sim \text{unif}(0, 1)$. 試求一轉換 $G(U)$, 亦即, 一 U 的函數, 使得

$$G(U) \sim \exp(\beta)$$

<解> (1) 令 $Y \sim \exp(\beta)$, 則 Y 的 pdf

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-y/\beta}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

以及當 $y \geq 0$ 時,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^y f_Y(t)dt \\ &= \int_0^y \frac{1}{\beta}e^{-t/\beta}dt \\ &= -e^{-t/\beta}\Big|_0^y = 1 - e^{-y/\beta} \end{aligned}$$

當 $y < 0$ 時,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^y 0dt = 0$$

因而 Y 的 cdf

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y/\beta}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 求 $F_Y(y)$ 的反函數 $F_Y^{-1}(u)$: 當 $y \geq 0$ 時,

$$F'_Y(y) = \frac{1}{\beta}e^{-y/\beta} > 0$$

故 $F_Y(y)$ 為嚴格遞增, 所以有反函數 $F_Y^{-1}(u)$, 求法如下述. 首先, 令

$$F_Y(y) = u$$

亦即,

$$1 - e^{-y/\beta} = u, \quad 0 < u < 1, \quad y > 0$$

接著, 解 y . 將上式整理並取 $\ln$ 後, 得

$$\ln(1 - u) = \ln(e^{-y/\beta}) = -y/\beta$$

即

$$y = -\beta \ln(1 - u)$$

因此, $F_Y(y)$ 的反函數

$$F_Y^{-1}(u) = -\beta \ln(1 - u), \quad 0 < u < 1$$

(3) 定義隨機變數

$$F_Y^{-1}(U) \stackrel{\text{def}}{=} -\beta \ln(1 - U)$$

其中

$$U \sim \text{unif}(0, 1)$$

則

$$F_Y^{-1}(U) \sim \exp(\beta)$$

即為所求. 為何如此? 首先, 因為 $0 < U < 1$, 得

$$-\beta \ln(1 - U) = (-)(-) = (+)$$

故當 $y < 0$ 時,

$$P\left(F_Y^{-1}(U) \leq y\right) = P(\emptyset) = 0 \quad (5)$$

當 $y \geq 0$ 時,

$$\begin{aligned} P\left(F_Y^{-1}(U) \leq y\right) &= P(-\beta \ln(1 - U) \leq y) \\ &= P(\ln(1 - U) \geq -y/\beta) \end{aligned}$$

因爲自然指數 $\exp(x)$ 爲嚴格遞增, 故將上式中第二個等號右邊內不等式的兩邊取自然指數後, 得

$$\begin{aligned} P\left(F_Y^{-1}(U) \leq y\right) &= P\left(1 - U \geq e^{-y/\beta}\right) \\ &= P\left(U \leq 1 - e^{-y/\beta}\right) \end{aligned}$$

又因爲 $y > 0$ 可導出

$$0 < 1 - e^{-y/\beta} < 1$$

且

$$U \sim \text{unif}(0, 1)$$

故上式相當於

$$\begin{aligned} P\left(F_Y^{-1}(U) \leq y\right) &= F_U\left(1 - e^{-y/\beta}\right) \\ &= 1 - e^{-y/\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

最後, 合併 (5) 式與 (6) 式, 得 $F_Y^{-1}(U)$ 的 cdf

$$P\left(F_Y^{-1}(U) \leq y\right) = \begin{cases} 1 - e^{-y/\beta}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

剛好就是 $\exp(\beta)$ 的 cdf. 因此,

$$F_Y^{-1}(U) = -\beta \ln(1 - U) \sim \exp(\beta)$$

註. 例 5 的推廣: 設 $Y \sim F_Y(y)$ 且 $F_Y(y)$ 有反函數 $F_Y^{-1}(u)$. 則

$$F_Y^{-1}(U) \sim F_Y(y)$$

其中 $U \sim \text{unif}(0, 1)$, 亦即, $F_Y^{-1}(U)$ 與 Y 有相同的分布.