

單元 48: 動差母函數法

(課本 §6.5)

此方法乃根據如下的唯一性定理.

定理 6.1. (唯一性). 令隨機變數 X 的 mgf 為 $m_X(t)$ 且隨機變數 Y 的 mgf 為 $m_Y(t)$. 若 $m_X(t)$ 與 $m_Y(t)$ 均在一個以 0 為中心的區間內存在且相等, 亦即, 存在一 $a > 0$, 使得對於所有的 $t \in (-a, a)$,

$$m_X(t) = m_Y(t)$$

則

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$$

例 1. 設隨機變數 $Y \sim N(\mu, \sigma)$. 試證

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

<證> 以前求過 $Y - u$ 的 mgf

$$m_{Y-\mu}(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

其中 $-\infty < t < \infty$.

因此, 根據 mgf 的定義, Z 的 mgf

$$\begin{aligned}m_Z(t) &= E\left(e^{tZ}\right) \\&= E\left\{\exp\left[\frac{t}{\sigma}(Y - \mu)\right]\right\}\end{aligned}$$

而上式剛好等於 $Y - \mu$ 的 mgf 在 $\frac{t}{\sigma}$ 的值, 亦即, 對於 $-\infty < t < \infty$,

$$\begin{aligned}m_Z(t) &= m_{Y-\mu}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \\&= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{\sigma^2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)\end{aligned}$$

剛好就是 $N(0, 1)$ 的 mgf. 故, 根據 mgf 的唯一性,

$$Z \sim N(0, 1)$$

例 2. 令 $Z \sim N(0, 1)$. 試求 Z^2 的機率分布.

<解> 根據 mgf 的定義以及隨機變數的函數的期望值公式, Z^2 的 mgf

$$\begin{aligned}m_{Z^2}(t) &= E\left(e^{tZ^2}\right) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} f(z) dz \\&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad (1)\end{aligned}$$

接著，整理上式中指數函數的部分，可得，當 $t < 1/2$ 時，

$$\begin{aligned} e^{tz^2} \cdot e^{-z^2/2} &= \exp \left[-\frac{z^2}{2}(1-2t) \right] \\ &= \exp \left\{ -\frac{z^2}{2[(1-2t)^{-1/2}]^2} \right\} \end{aligned}$$

因此，由上式及 (1) 式，對於 $t < 1/2$ ，得

$$\begin{aligned} m_{Z^2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2[(1-2t)^{-1/2}]^2} \right\} dz \\ &= (1-2t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-2t)^{-1/2}} \cdot \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{z^2}{2[(1-2t)^{-1/2}]^2} \right\} dz \\ &= (1-2t)^{-1/2}(1) = (1-2t)^{-1/2} \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃因為第二個等號右邊的被積函數剛好是 $N(0, (1-2t)^{-1/2})$ 的 pdf，因而完整的積分等於 1 所致。因為 $\text{gamma}(\alpha, \beta)$ 的 mgf 為

$$(1 - \beta t)^{-\alpha}, \quad t < 1/\beta$$

所以由上式知 Z^2 的 mgf 剛好就是 $\text{gamma}(1/2, 2)$ 的 mgf。又 $\chi^2(n)$ 的分布就是 $\text{gamma}(\frac{n}{2}, 2)$ 。故，

根據 mgf 的唯一性,

$$Z^2 \sim \chi^2(1)$$

求獨立隨機變數的和的分布時, 動差母函數法是一相當有用的方法, 如下述.

定理 6.2. 令 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 為相互獨立的隨機變數, 且其 mgf 分別為 $m_{Y_1}(t), m_{Y_2}(t), \dots, m_{Y_n}(t)$. 若

$$U = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

則 U 的 mgf

$$m_U(t) = m_{Y_1}(t) \times m_{Y_2}(t) \times \dots \times m_{Y_n}(t)$$

<證> 根據 mgf 的定義以及 U 的定義, U 的 mgf

$$\begin{aligned} m_U(t) &= E(e^{tU}) \\ &= E[e^{t(Y_1+Y_2+\dots+Y_n)}] \\ &= E(e^{tY_1} \cdot e^{tY_2} \dots e^{tY_n}) \end{aligned}$$

因為 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互獨立, 故 “個別隨機變數函數的乘積期望值” 等於 “個別隨機變數函數的期望值乘積”, 因而由上式得

$$\begin{aligned} m_U(t) &= E(e^{tY_1}) \times E(e^{tY_2}) \times \dots \times E(e^{tY_n}) \\ &= m_{Y_1}(t) \times m_{Y_2}(t) \times \dots \times m_{Y_n}(t) \end{aligned}$$

例 3. 一個事實為, 在一給定的時間內,

顧客數 $\sim$ Poisson 分布

且令 $Y_1 =$ 第一個顧客到達的時間, $Y_2 =$ 第二個顧客與第一個顧客的間隔時間, $\dots$, $Y_n =$ 第 n 個顧客與第 $(n-1)$ 個顧客的間隔時間, 如圖示, 則

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(\theta)$$

亦即, $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互獨立且對於 $i = 1, 2, \dots, n$,

$$f_{Y_i}(y_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-y_i/\theta}, & y_i > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求第 n 個顧客到達的時間 U 的分布.

<解> 由題意知, 第 n 個顧客到達的時間

$$U = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

又因為 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互獨立, 且在相同的

$$\exp(\theta) = \text{gamma}(1, \theta)$$

分布下, 對於 $i = 1, 2, \dots, n$, 而有的 mgf

$$m_{Y_i}(t) = (1 - \theta t)^{-1}, \quad t < 1/\theta$$

故根據定理 6.2, 得 U 的 mgf

$$\begin{aligned} m_U(t) &= m_{Y_1}(t) \times m_{Y_2}(t) \times \dots \times m_{Y_n}(t) \\ &= (1 - \theta t)^{-n}, \quad t < 1/\theta \end{aligned}$$

剛好就是 $\text{gamma}(n, \theta)$ 的 mgf. 因此, 根據 mgf 的唯一性,

$$U \sim \text{gamma}(n, \theta)$$

且 pdf

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n \Gamma(n)} (u^{n-1} e^{-u/\theta}), & u > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理 6.3. 設隨機變數 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互獨立且對於 $i = 1, 2, \dots, n$,

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$$

令 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 為常數. 若

$$U = \sum_{i=1}^n a_i Y_i$$

則

$$U \sim N \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right)^{1/2} \right)$$

<解> 已知 $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, 故對於 $i = 1, 2, \dots, n$, Y_i 的 mgf

$$m_{Y_i}(t) = \exp \left(\mu_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 t^2 \right)$$

由此可得出, 對於 $i = 1, 2, \dots, n$, $a_i Y_i$ 的 mgf

$$\begin{aligned} m_{a_i Y_i}(t) &= E(e^{a_i t Y_i}) \\ &= m_{Y_i}(a_i t) \\ &= \exp \left[\mu_i a_i t + \frac{1}{2} \sigma_i^2 (a_i t)^2 \right] \\ &= \exp \left[a_i \mu_i t + \frac{1}{2} (a_i^2 \sigma_i^2) t^2 \right] \end{aligned}$$

因此, 根據定理 6.2 以及上式, U 的 mgf

$$\begin{aligned} m_U(t) &= m_{a_1 Y_1}(t) \times m_{a_2 Y_2}(t) \times \dots \times m_{a_n Y_n}(t) \\ &= \exp \left[a_1 \mu_1 t + \frac{1}{2} (a_1^2 \sigma_1^2) t^2 \right] \cdot \\ &\quad \exp \left[a_2 \mu_2 t + \frac{1}{2} (a_2^2 \sigma_2^2) t^2 \right] \cdot \dots \\ &\quad \exp \left[a_n \mu_n t + \frac{1}{2} (a_n^2 \sigma_n^2) t^2 \right] \\ &= \exp \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i \right) t + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right) t^2 \right] \end{aligned}$$

所以, 根據 mgf 的唯一性, U 為期望值等於 $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ 且變異數等於 $\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$ 的常態分布, 亦即,

$$U \sim N \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right)^{1/2} \right)$$

定理 6.4. 設隨機變數 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互獨立且對於 $i = 1, 2, \dots, n$,

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$$

又對於 $i = 1, 2, \dots, n$, 定義

$$Z_i = \frac{Y_i - \mu_i}{\sigma_i}$$

則

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$

<解> 因為對於 $i = 1, 2, \dots, n$,

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$$

故

$$Z_i \sim N(0, 1)$$

且

$$Z_i^2 \sim \chi^2(1)$$

因此, 對於 $i = 1, 2, \dots, n$, Z_i^2 的 mgf

$$m_{Z_i^2}(t) = (1 - 2t)^{-1/2}, \quad t < 1/2$$

又

$$Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_n^2$$

各自分別為相互獨立的

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

的函數, 故

$$Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_n^2$$

亦相互獨立. 所以, 根據定理 6.2,

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

的 mgf

$$\begin{aligned} m_V(t) &= m_{Z_1^2}(t) \times m_{Z_2^2}(t) \times \cdots \times m_{Z_n^2}(t) \\ &= (1 - 2t)^{-n/2}, \quad t < 1/2 \end{aligned}$$

剛好就是 $\text{gamma}(n/2, 2)$, 也就是 $\chi^2(n)$ 的 mgf. 因此, 根據 mgf 的唯一性,

$$V = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$$