

單元 6: 計數樣本點的工具

(課本 §2.6)

當樣本空間的所有樣本點數非常大, 且人工列舉是繁瑣與不可能時, 計數 (counting) 法將會是一種計算機率的有效方法, 如計數出樣本空間含有 N 個相同可能的 (equiprobable) 樣本點, 並且事件 A 含有 n_a 個樣本點, 則

$$P(A) = \frac{n_a}{N} \stackrel{\text{或}}{=} \frac{|A|}{|S|}$$

由組合分析發展的計數法如下:

定理 2.1 (mn 律). 設一群體內含 m 個元素

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

且另一群體內含 n 個元素

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

則由每一群體中選出一元素而形成一對 (pair) 時, 形成的對數為

$$mn = m \times n$$

<證> 將此二群體的元素列成下列的表格:

因爲每對 $\{a_i, b_j\}$ 對應到一個方格, 且共有 mn 個方格, 故可形成 mn 對.

註. mn 律可推廣到任意個數的集合 (群體), 如有 3 個集合, 分別爲 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 及 $\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$, 則由每一集合選出一元素而形成一個三元組 (triplet) 時, 共可形成 mnp 個三元組.

爲何如此? 因爲每一個三元組 (a_i, b_j, c_k) 相當於一對 $((a_i, b_j), c_k)$, 其中有 mn 對 (a_i, b_j) (根據定理 2.1) 及 p 個元素 c_k . 再由定理 2.1, 可得 $mn \times p = mnp$ 對 $((a_i, b_j), c_k)$. 因此, 總三元組數爲 mnp .

例 1. 投擲一對骰子的樣本點 = 一對 (x, y) , x : 第一個骰子的結果, 爲 $\{1, 2, \dots, 6\}$ 中的一數, y : 第二個骰子的結果, 爲 $\{1, 2, \dots, 6\}$ 中的一數. 故

$$|S| = 6 \times 6 = 36$$

投擲一銅板三次的樣本點 = 一個三元組 (x, y, z) , x, y, z 均爲 $\{\text{正}, \text{反}\}$ 中的一字母. 故

$$|S| = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

例 2. 設一實驗為記錄任選 20 人的生日. 不考慮閏年且假設僅有 365 個不同的生日.

(a) 試求 $|S|$.

(b) 設每一種 20 人生日的組合都是相同可能地發生 (equiprobable), 試求 20 人中, 每人的生日都不同的機率.

<解> (a) 記錄任選 20 人之生日的樣本點 = 一個 20 元組 (20-tuple)

$$(a_1, a_2, \dots, a_{20})$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ 分別表示第 1 人, 第 2 人, ..., 第 20 人的生日, 均為 $\{1, 2, \dots, 365\}$ (一年 365 天的標示集合) 中的一數. 重複應用 mn 律, 得

$$|S| = \underbrace{(365)(365) \cdots (365)}_{\text{共 20 項}} = (365)^{20}$$

其中第一個 365 表示 a_1 的可能選法, 第二個 365 表示 a_2 的可能選法, ..., 第 20 個 365 表示 a_{20} 的可能選法.

假設所有樣本點均是相同可能的，則對任一樣本點 E_i ,

$$P(E_i) = \frac{1}{(365)^{20}}$$

(b) 令事件 $A = 20$ 人中每人的生日均不同. A 中的一樣本點 = 一個 20 元組 $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$, 其中 a_1 由一含 365 個數的集合中選出, a_2 由一含 364 個數的集合中選出 (需扣掉選出之 a_1 , 不管它 (a_1) 為何, 剩下之數有 364 個), a_3 由一含 363 個數的集合中選出 (需扣掉選出之 a_1 與 a_2 , 不論它們為何, 剩下之數為 363 個), $\dots$, a_{20} 由一含 $(365 - 19) = 346$ 個數的集合中選出 (扣掉先前選出之 $a_1, \dots, a_{19}$, 不論它們為何, 剩下之數共有 346 個). 重複使用 mn 律, 得

$$n_a = |A| = (365)(364)(363) \cdots (346)$$

故

$$P(A) = \frac{n_a}{N} = \frac{(365)(364) \cdots (346)}{(365)^{20}} = 0.5886$$

(因為假設每一樣本點均是相同可能地發生)

註. 經常一實驗的樣本點可以一串符號的安排表示之. 此時樣本點的總數就等於對應符號可被排列的不同方法數, 可由下列定理計算出.

定義 1. r 個不同物件 (object) 的一有序安排 (ordered arrangement) 稱作一排列 (permutation). 由 n 個不同物件中, 一次選取 r 個排列的總方法數以 P_r^n 表示之.

定理 2.2. 由 n 個不同物件中, 一次選取 r 個排列的總方法數

$$\begin{aligned} P_r^n &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

<證> “所求之總方法數” = “將 n 個不同物件填在 (放在) 不同位置上的總方法數”. 重複應用 mn 律, 放在第一個位置的物件, 有 n 種選法; 放在第二個位置的物件有 $(n-1)$ 種選法 (扣掉已選出的第一個物件); ...; 放在第 r 個位置的物件, 有 $(n-r+1)$ 種選法. 因此不同安排的總方法數

$$P_r^n = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

以階乘 (factorial) 表示時,

$$\begin{aligned} P_r^n &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

其中

$$n! = n(n-1) \cdots (2)(1) \text{ 且 } 0! = 1$$

例 3. 由 30 名員工名單中, 以不放回 (without replacement) 的方式選出 3 位. 第 1 位抽出者得獎 \$100, 第 2 位 \$50, 第 3 位 \$25. 試問此實驗有多少個樣本點.

<解> 因為以不放回方式, 且獎金數不同, “總樣本點數” = “由 $n = 30$ 個人名中, 一次選出 $r = 3$ 名的排列總數”. 因此,

$$|S| = P_3^{30} = (30)(29)(28) = 24,360$$

例 4. 設一組裝作業含有 4 個步驟, 其順序可任意安排, 今欲比較每一安排的組裝時間, 問需比較多少種不同的組裝作業?

<解> 總組裝作業數 = “由 $n = 4$ 個步驟中, 一次選出 $r = 4$ 個的排列總數”. 因此,

$$\text{總組裝作業數} = P_4^4 = \frac{4!}{0!} = (4)(3)(2)(1) = 24$$

註. 將 n 個不同物件, 分割成各有其大小的 k 個不相交群組的總方法數, 可由下列定理計算出.

定理 2.3. 將 n 個不同物件分割成大小為 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 的 k 個不相交的群組的總方法數

$$N = \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

其中

$$\sum_{i=1}^k n_i = n$$

<證> “一個分割” 相當於 “一列 n 個位置中, 前 n_1 個放第 1 群組中的元素, 第 2 群組放在接著的 n_2 個位置, $\dots$, 第 k 個群組放在最後 n_k 個位置且不考慮群組內的排列”. 所以, 有 N 種放置法. 針對每一種放置法, 考慮各群組內的排列後, 均可形成一個由 n 個不同物件所產生的排列, 由 mn 律, 共得

$$N \cdot (n_1!)(n_2!) \cdots (n_k!)$$

種不同的排列.

又任一種排列均可被視為其前 n_1 個元素構成第 1 群組, 接著 n_2 個元素構成第 2 群組, $\dots$, 最後 n_k 個元素構

成第 k 個群組，而涵蓋於前述形成排列的方法中。因此，可得總排列數

$$P_n^n(= n!) = N \cdot n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!$$

解之，得

$$N = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_k}$$

註. $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_k}$ 稱作多元項係數 (multinomial coefficient)，因為它出現在多元項 $(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)$ 的 n 次方展開式中：

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)^n = \sum_{(n_1, \dots, n_k)} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_k} y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_k^{n_k}$$

其中加法符號 $\sum$ 涵蓋所有滿足

$$n_i \geq 0, \ i = 1, \dots, k \text{ 且 } n_1 + \cdots + n_k = n$$

的 $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 。

例 5. 將 20 位工人分配到 4 種不同的工作中，其中第 1 種工作最累，需要 6 人，第 2, 3, 4 種分別需要 4,

5, 與 5 人. 爭論起因於, 在宣稱隨機分配下, 卻有某一種族的 4 位工人均被分配到第 1 種工作. 調解委員會當如何判斷是否公正的問題?

<解> 先計算 “所有可能的分配法 N ” = “將 $n = 20$ 人分割成大小為 $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, $n_3 = 5$, $n_4 = 5$ 的 4 組的總方法數”. 故,

$$N = \binom{20}{6 \ 4 \ 5 \ 5} = \frac{20!}{6!4!5!5!}$$

若為隨機指派 (random assignment), 則每一樣本點的機率為 $1/N$. 令事件 $A \stackrel{\text{def}}{=} \text{某一種族的 4 人均被分派到第 1 種工作}$. 則

$$P(A) = \frac{|A|}{N}$$

又 A 相當於由剩下的 16 人中, 選出 2 人到工作 1 (因為此 4 人已被指派到工作 1), 選出 4, 5, 與 5 人到工作 2, 3, 與 4. 所以,

$$|A| = \binom{16}{2 \ 4 \ 5 \ 5} = \frac{16!}{2!4!5!5!}$$

因此,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{|A|}{N} = \frac{16!/2!}{20!/6!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} \\ &= 0.0031 \end{aligned}$$

推論 (總結): 若是隨機指派, 則此 4 人均被分配到工作 1 的機率是一非常小的值 0.0031, 而居然會發生, 故有理由懷疑其公平性.

註. 有些情況下, 樣本點可由一串與排列無關的 (亦即, 排列作用是不相關的) 符號確認出, 此時, 總樣本點數可由下列定理計算出.

定義 2. 由 n 個不同物件中, 一次取出 r 個的組合 (combination) 總數就是 “由 n 個不同物件中, 形成大小為 r 的子集合的總數”. 此數以 C_r^n 或 $\binom{n}{r}$ 表示之.

定理 2.4. 由 n 個不同物件中, (以不放回方式) 取出大小為 r 的無序 (unordered) 子集合的總數是

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

<證> 由 n 個不同物件中, 取出 r 個 $\Leftrightarrow$ 將 n 個不同物件分成大小分別為 r 與 $n-r$ 的 2 組. 故,

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \binom{n}{r \quad (n-r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}$$

註. $\binom{n}{r}$ 稱作二項係數 (binomial coefficient), 因為其出現在二項展開式中:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

例 6. 由 5 位申請者中, 選出 2 位的總方法數為

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

令 $A = 2$ 位最佳申請者中, 剛好一位被選中的事件, 則

$$\begin{aligned} |A| &= (2 \text{ 位最佳者中選出一位的方法數}) \cdot \\ &\quad (\text{剩下 3 位中選出一位的方法數}) \\ &= \binom{2}{1} \binom{3}{1} = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

因此, 在隨機選取下,

$$P(A) = \frac{|A|}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

例 7. 設一公司可向 M 個配售單位 (distributor) 訂貨, 且準備下 n 張訂單 (orders) ($n < M$). 又設每一配售單位得到任一張訂單的機會均等, 且貨源充裕, 接收的訂單數沒有限制. 令 $A =$ 某一配售單位, 如 I, 剛好得到 k ($k \leq n$) 張訂單的事件. 試求 $P(A)$.

<解> 因為每一個配售單位接收的訂單數沒有限制，每一張訂單可分配給 M 個配售單位中的一個（亦即，有 M 種分配法），故由 mn 律， n 張訂單共有

$$\underbrace{M \cdot M \cdots M}_{n \text{ 個}} = M^n$$

種分配法。因此，

$$|S| = M^n \text{ 且 } P(E_i) = \frac{1}{M^n}$$

（因為隨機分配）

分配給配售單位 I k 張訂單的分法有 $\binom{n}{k}$ 種，且剩下的 $(n - k)$ 張訂單分配給其餘 $(M - 1)$ 個配售單位的分法有 $(M - 1)^{n-k}$ 種，故由 mn 律，

$$|A| = \binom{n}{k} \cdot (M - 1)^{n-k}$$

因此，

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\binom{n}{k} (M - 1)^{n-k}}{M^n}$$

註．條件機率在以事件組合法求一事件發生的機率時，扮演相當重要的角色。此外，也在樣本點不是相同可能地發生情況下，於求樣本點的機率時，非常有用。