

## 單元 8: 機率的二律

### (課本 §2.8)

計算事件的聯集或交集的機率的二律, 在以事件組合法求機率中, 扮演重要的角色, 如下述.

定理 2.5 (機率的乘法律, Multiplicative Law of Probability). 二事件  $A$  與  $B$  的交集的機率

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P(A|B)\end{aligned}$$

若  $A$  與  $B$  相互獨立, 則

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

<證> 由條件機率的定義,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

得

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

或由

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

得

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

由獨立性的定義, 當  $A$  與  $B$  相互獨立時,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

註. 乘法律的推廣:

(1) 三事件  $A, B, C$  的交集的機率

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

因爲

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P((A \cap B) \cap C) \\ &= P(A \cap B)P(C|A \cap B) \\ &\quad (\text{由定理 2.5}) \\ &= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) \\ &\quad (\text{由定理 2.5}) \end{aligned}$$

(2)  $k$  個事件  $A_1, A_2, \dots, A_k$  的交集的機率

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_k) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \\ &\quad P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{k-1}) \end{aligned}$$

定理 2.6 (機率的加法律, Additive Law of Probability). 二事件  $A$  與  $B$  的聯集的機率

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<證> 由 Venn-diagram, 可得

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B) \text{ (二互斥事件)}$$

以及

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \text{ (二互斥事件)}$$

接著由機率的定義, 因為互斥, 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \quad (1)$$

以及

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \quad (2)$$

由 (2) 式解  $P(\bar{A} \cap B)$  並代入 (1) 式, 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

註. 加法律的推廣: 三事件  $A, B, C$  的聯集的機率, 由 Venn-diagram, 可得

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = & \\ & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ & P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

定理 2.7. 對任一事件  $A$ ,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

<證> 因爲  $S = A \cup \overline{A}$  且  $A$  與  $\overline{A}$  互斥, 得

$$1 = P(S) = P(A) + P(\overline{A})$$

所以,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$