單元 28: Gamma 機率分布
(課本 §4.6)

右偏斜 (right-skewed) 機率分布的 pdf 的圖形如下.

(大部分面積位於原點附近, 隨著 $y\uparrow$, pdf 漸漸 $\downarrow$.)

其中一類可用於模型化: 飛機引擎的故障間隔時間, 顧客的間隔時間, 汽車檢修時間, ... 等, 稱作 gamma 機率分布, 正式定義如下:

定義 1. $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 若且爲若 Y 的 pdf

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & 0 \le y < \infty \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy$$

註 1. $\Gamma(\alpha)$ 爲熟知的 gamma 函數, 性質如下:

(1) $\Gamma(1)=1$, 因爲根據 gamma 函數的定義,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-y}\,dy \\ &= -e^{-y}\Big|_0^\infty \\ &= 1-e^{-\infty}=1\end{aligned}$$

(2) 針對 $\alpha>1$, $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$, 因爲根據 gamma 函數的定義,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy \tag{1}$$

接著根據分部積分, 令

$$\begin{aligned}&u=y^{\alpha-1} \;\Rightarrow\; du=(\alpha-1)y^{\alpha-2}dy \\ &dv=e^{-y}dy \;\Rightarrow\; v=-e^{-y}\end{aligned}$$

由 (1) 式可得

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= uv-vdu \\ &= -y^{\alpha-1}e^{-y}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty(\alpha-1)y^{\alpha-2}e^{-y}\,dy \\ &= -\lim_{y\to\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{e^y}+ \\ &\qquad (\alpha-1)\int_0^\infty y^{(\alpha-1)-1}e^{-y}\,dy \\ &= 0+(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\ (\text{因爲 } \alpha-1>0) \\ &= (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)\end{aligned}$$

(3) 針對正整數 n, $\Gamma(n) = (n-1)!$, 因爲根據 (1) 與 (2),

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1)\\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &\vdots\\ &= (n-1)(n-2)\cdots(1)\Gamma(1)\\ &= (n-1)!\end{aligned}$$

註 2. α =1, 2, 4 且 $\beta = 1$ 的 gamma pdf 的圖形如下.

不同的 α 會產生不同的型態 (shape), 故稱參數 α 爲型態參數 (shpae parameter).

設 $Y \sim$ gamma(α, β), 則 cY, $c > 0$ (常數), 是將度量值的尺度 (scale) 放大 c 倍, 而此時 cY 依然爲一 gamma 分布, 其型態參數依然爲 α (未變), 但卻有不同的 β 值 (此結果待證), 故稱參數 β 爲尺度參數 (scale parameter), 亦即, β 的改變會有對應尺度的改變.

註 3. 若 α 爲整數, $Y \sim$ gamma(α, β) 的 cdf (分布函數) 可表成某特定的卜松機率的和 (參看習題

4.79), 故可求出眞確值 (closed-form). 若 α 不爲整數, 且 $0 < a < b < \infty$ 時,

$$P(a \leq Y \leq b) = \int_a^b \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\,dy$$

的完整型 (closed-form) 不可能求得, 因此需查表求其近似值.

定理 4.8. 設 $Y \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$, 則期望值

$$\mu = E(Y) = \alpha\beta$$

且變異數

$$\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \alpha\beta^2$$

<證> 根據期望值的定義,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy \\
&= \int_0^\infty y\left(\frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\right)dy \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^\alpha e^{-y/\beta}\,dy \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \cdot \beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1) \\
&= \beta \cdot \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta
\end{aligned}$$

上式中第四個等號成立乃因爲 gamma(α, β) 的 pdf 的完整積分爲 1, 亦即

$$\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\,dy = 1$$

而可由此導出

$$\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}\,dy = \beta^\alpha\Gamma(\alpha) \tag{2}$$

最後, 再根據 (2) 式可導出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^{\alpha}e^{-y/\beta}\,dy &= \int_0^\infty y^{(\alpha+1)-1}e^{-y/\beta}\,dy \\ &= \beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\end{aligned}$$

又根據隨機變數函數的期望值公式以及 (2) 式,

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \int_0^\infty y^2\frac{y^{\alpha-1}e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\,dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{\alpha+1}e^{-y/\beta}\,dy \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\cdot\beta^{\alpha+2}\Gamma(\alpha+2) \\ &= \beta^2\cdot\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 \\ &= \beta^2(\alpha^2+\alpha-\alpha^2) = \alpha\beta^2\end{aligned}$$

Gamma 分布隨機變數的 2 特例:

特例一.

定義 2. 令 ν 爲一<u>正整數</u>.

$$Y \sim \chi^2(\nu)$$

稱作自由度爲 ν 的卡方分布 (Chi-square distribution with ν degree of freedom), 若且爲若

$$Y \sim \text{gamma}(\nu/2, 2)$$

亦即, $\alpha = \nu/2$, $\beta = 2$ 的 gamma 分布就是自由度爲 ν 的卡方分布.

定理 4.9. 若 $Y \sim \chi^2(\nu)$, 則期望值

$$\mu = E(Y) = \nu$$

且變異數

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = 2\nu$$

<證> 首先, 根據卡方分布的定義,

$$Y \sim \chi^2(\nu) \sim \mathrm{gamma}(\nu/2,\, 2)$$

因此, 由定理 4.8 得期望值

$$E(Y) = \frac{\nu}{2} \cdot 2 = \nu$$

以及變異數

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\nu}{2} \cdot 2^2 = 2\nu$$

特例二.

定義 3. 令 $\beta > 0$.

$$Y \sim \exp(\beta)$$

稱作參數爲 β 的指數分布, 若且爲若

$$Y \sim \mathrm{gamma}(1,\, \beta)$$

亦即, $\alpha = 1$ 的 gamma 分布就是參數爲 β 的指數分布, 其 pdf

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{-y/\beta}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理 4.10. 設 $Y \sim \exp(\beta)$, 則期望値

$$\mu = E(Y) = \beta$$

且變異數

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y) = \beta^2$$

<證> 根據指數分布的定義,

$$Y \sim \exp(\beta) \sim \mathrm{gamma}(1, \beta)$$

因此, 由定理 4.8 得

$$E(Y) = 1 \cdot \beta = \beta$$

且

$$\mathrm{Var}(Y) = 1 \cdot \beta^2 = \beta^2$$

註 1. 指數分布的 "無記憶性質" (memoryless property): 設 $Y \sim \exp(\beta)$. 則對任意的 $a > 0$,

$b > 0$,

$$P(Y > a + b | Y > a) = P(Y > b)$$

亦即, "某零件已用了 a 個單位時間, 可再用至少 b 個單位時間的機會" 與 "一新零件可用至少 b 個單位時間的機會" 一樣, 如同可忽略已經過之事, 像無記憶一般, 如圖所示. 故有此種無記憶性質的零件, 如保險絲, 的壽命就可用指數隨機變模型化.

<證> 首先根據條件機率的定義,

$$\begin{aligned} & P(Y > a + b | Y > a) \\ & \quad = \frac{P((Y > a + b) \cap (Y > a))}{P(Y > a)} \end{aligned} \tag{3}$$

因爲

$$Y > a + b \ \Rightarrow \ Y > a$$

故

$$(Y > a + b) \subseteq (Y > a)$$

因此, 由 (3) 式, 得

$$P(Y > a + b | Y > a) = \frac{P(Y > a + b)}{P(Y > a)} \tag{4}$$

又對任意的 $c > 0$,

$$\begin{aligned} P(Y > c) &= \int_c^\infty \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}\, dy \\ &= -e^{-y/\beta}\Big|_c^\infty \\ &= e^{-c/\beta} - e^{-\infty} \\ &= e^{-c/\beta} \end{aligned} \qquad (5)$$

最後, 由 (4) 式與 (5) 式, 得

$$\begin{aligned} P(Y > a + b | Y > a) &= \frac{e^{-(a+b)/\beta}}{e^{-a/\beta}} \\ &= e^{-b/\beta} \\ &= P(Y > b) \end{aligned}$$

註 2. 在離散分布中, 有無記憶性質的爲幾何分布 (geometric distribution), 亦即, 設 $Y \sim$ geometric(p), 則對任意的整數 $m > 0$, $n > 0$,

$$P(Y > m + n | Y > m) = P(Y > n)$$

<證> 首先, 根據條件機率的定義以及 $Y > m + n \Rightarrow Y > m$, 可得

$$P(Y > m + n | Y > m) = \frac{P(Y > m + n)}{P(Y > m)} \qquad (6)$$

又對任一整數 $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(Y > k) &= P(\text{前面 } k \text{ 次試驗均失敗}) \\ &= q^k \end{aligned} \tag{7}$$

因此, 由 (6) 式與 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} P(Y > m+n | Y > m) &= \frac{q^{m+n}}{q^m} \\ &= q^n \\ &= P(Y > n) \end{aligned}$$

註 3. 指數分布與幾何分布之間的一有趣關係 (習題 4.75): 設 $Y \sim \exp(\beta)$. 定義

$$X \stackrel{\text{def}}{=} k, \text{ 若 } k-1 \leq Y < k, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

則

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(k-1 \leq Y < k) \\ &= \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}\, dy \\ &= -e^{-y/\beta}\Big|_{k-1}^{k} \\ &= e^{-(k-1)/\beta} - e^{-k/\beta} \\ &= \left(e^{-1/\beta}\right)^{k-1} \left(1 - e^{-1/\beta}\right) \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$ 故,

$$X \sim \text{geometric}(1 - e^{-1/\beta})$$

與直覺相符. 此乃因爲根據 X 的定義,

$$X = \text{到零件壞掉所經過的}\underline{\text{單位時間數}}$$

又根據 Y 的無記憶性質,

$$\begin{aligned}
&\text{在}\underline{\text{任一}}\text{單位時間內零件壞掉的機率} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}\, dy \\
&\quad \text{(根據無記憶性質)} \\
&= -e^{-y/\beta}\Big|_0^1 \\
&= 1 - e^{-1/\beta}
\end{aligned}$$

故, 直覺上

$$X \sim \text{geometric}(1 - e^{-1/\beta})$$