單元 47: 轉換法
(課本 §6.4)

一. 遞增函數的轉換

設 $h(y)$ 爲一遞增函數且 $Y \sim f_Y(y)$. 令 $U = h(Y)$, 則 U 的 cdf

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(h(Y) \leq u)$$

因爲 h 爲遞增, 故可導出 h 的反函數 h^{-1} 存在且也是遞增, 因而將上式第三項中形成事件的不等號兩邊取 h^{-1} 後, 可得相同不等號的等價事件以及等價的式子

$$F_U(u) = P\left(h^{-1}(h(Y)) \leq h^{-1}(u)\right)$$

最後, 根據 h^{-1} 與 h 互爲反函數的性質以及 Y 的 cdf 的定義, 上式相當於

$$F_U(u) = P\left(Y \leq h^{-1}(u)\right) = F_Y\left(h^{-1}(u)\right)$$

因此, 新隨機變數 U 的 pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\ &= \frac{d}{du} F_Y\left(h^{-1}(u)\right) \\ &= f_Y\left(h^{-1}(u)\right) \frac{d}{du} h^{-1}(u) \\ &\overset{\text{簡記}}{=} f_Y\left(h^{-1}(u)\right) \frac{dh^{-1}}{du} \end{aligned}$$

結論. 以轉換法求機率分布的步驟:

(1) 確定 $h(y)$ 為遞增函數, 並由 $h(y) = u$ 解 y, 得 h 的反函數

$$y = h^{-1}(u)$$

(2) 將 $y = h^{-1}(u)$ 代入原來的隨機變數 Y 的 pdf $f_Y(y)$ 內, 並乘以 $\frac{dh^{-1}}{du}$, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u) = f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\frac{dh^{-1}}{du}$$

註. 需要注意 $f_U(u)$ 為正的範圍, 此乃由 $f_Y(y)$ 所決定.

例 1. 設隨機變數 Y 的 pdf

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

令 $U = 3Y - 1$. 試以轉換法求 U 的 pdf.

<解> 根據新隨機變數 U 的定義,

$$h(y) = 3y - 1$$

爲一遞增函數, 故令

$$3y - 1 = u$$

解 y, 得

$$y = \frac{u+1}{3}$$

因此, h 的反函數

$$h^{-1}(u) = \frac{u+1}{3}$$

(2) 因爲

$$\frac{d}{du}h^{-1}(u) = \frac{1}{3}$$

所以, 根據公式, 新隨機變數 U 的 pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\frac{dh^{-1}}{du} \\ &= f_Y\left(\frac{u+1}{3}\right)\frac{1}{3} \qquad (1) \end{aligned}$$

因爲原隨機變數 Y 的 pdf $f_Y(y)$ 在區間 $0 \le y \le 1$ 上取值 $2y$, 其它地方取值 0, 故當

$$0 \le \frac{u+1}{3} \le 1$$

亦即,

$$-1 \le u \le 2$$

時, 由 (1) 式得

$$f_U(u) = 2\left(\frac{u+1}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{9}(u+1)$$

當 $\frac{u+1}{3} < 0$ 或 $\frac{u+1}{3} > 1$, 亦即, $u < -1$ 或 $u > 2$ 時, 由 (1) 式得

$$f_U(u) = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

因此, 綜合上述, 得 U 的 pdf

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{2}{9}(u+1), & -1 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

二. 遞減函數的轉換

設 $h(y)$ 爲一遞減函數且 $Y \sim f_Y(y)$. 令 $U = h(Y)$, 則 U 的 cdf

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(h(Y) \leq u)$$

因爲 h 爲遞減, 故可導出 h 的反函數 h^{-1} 存在且也是遞減, 因而將上式第三項中形成事件的不等號兩邊取 h^{-1} 後, 可得相反不等號的等價事件以及等價的式子

$$F_U(u) = P\left(h^{-1}(h(Y)) \geq h^{-1}(u)\right)$$

最後, 再根據 h^{-1} 與 h 互爲反函數的性質, 餘集事件的機率公式, 以及 Y 的 cdf 的定義, 上式相當於

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P\left(Y \geq h^{-1}(u)\right) \\ &= 1 - P\left(Y \leq h^{-1}(u)\right) \\ &= 1 - F_Y\left(h^{-1}(u)\right) \end{aligned}$$

因此, 對 u 微分, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\ &= \frac{d}{du}\left[1 - F_Y\left(h^{-1}(u)\right)\right] \\ &= -f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\frac{d}{du}h^{-1}(u) \\ &\overset{\text{簡記}}{=} -f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\frac{dh^{-1}}{du} \end{aligned}$$

又因爲 h^{-1} 爲遞減, 故

$$\frac{dh^{-1}}{du} < 0$$

因而

$$-\frac{dh^{-1}}{du} = \left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|$$

且上式可改寫成

$$f_U(u) = f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|$$

註. 綜合前述的兩種轉換, 若 $h(y)$ 在集合

$$\{y : f_Y(y) > 0\} \text{ (稱作 } Y \text{ 的 support)}$$

上爲遞增或遞減 (僅爲二種中的一種, 不可又遞增且又遞減), 則新隨機變數 $U = h(Y)$ 的 pdf

$$f_U(u) = f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|$$

其中 $h^{-1}(u)$ 爲 $h(y)$ 的反函數. 步驟如下:

(1) 求反函數 $y = h^{-1}(u)$.

(2) 計算 $\frac{dh^{-1}}{du}$.

(3) 將 $y = h^{-1}(u)$ 代入原隨機變數 Y 的 pdf $f_Y(y)$ 並乘以 $\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|$, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u) = f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|$$

例 2. 設隨機變數 Y 的 pdf

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $U=-4Y+3$ 的 pdf.

<解> 令

$$u=h(y)=-4y+3$$

乃一遞減的函數. 解 y, 得

$$y=\frac{3-u}{4}=h^{-1}(u)$$

且

$$\frac{dh^{-1}}{du}=-\frac{1}{4}$$

因此, U 的 pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= f_Y\left(h^{-1}(u)\right)\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| \\ &= f_Y\left(\frac{3-u}{4}\right)\frac{1}{4} \qquad (2) \end{aligned}$$

又因爲 $f_Y(y)$ 在區間 $0\le y\le 1$ 上取值 $2y$, 其它地方取值 0, 故當

$$0\le\frac{3-u}{4}\le 1$$

亦即,

$$-1\le u\le 3$$

時, 由 (2) 式得

$$f_U(u) = 2\left(\frac{3-u}{4}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{8}(3-u)$$

另當 $\frac{3-u}{4} < 0$ 或 $\frac{3-u}{4} > 1$, 亦即, $u < -1$ 或 $u > 3$ 時, 由 (2) 式得

$$f_U(u) = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

因此, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{8}(3-u), & -1 \le u \le 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

三. 多變量情況的轉換

舉例說明如下.

例 1. 設隨機變數 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1+y_2)}, & 0 \le y_1, 0 \le y_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $U = Y_1 + Y_2$ 的 pdf.

<解> 分成如下的二步驟:

(1) 求 Y_1 與 U 的 joint pdf $g(y_1, u)$.

(2) 再由 $g(y_1, u)$ 求出 U 的 marginal pdf $f_U(u)$.

分別詳述如下.

(1) 固定 $Y_1 = y_1 \geq 0$, 則

$$U = y_1 + Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} h(Y_2)$$

乃一 Y_2 的函數. 令 $u = y_1 + y_2$. 解 y_2, 得

$$y_2 = u - y_1 = h^{-1}(u)$$

且

$$\frac{dh^{-1}}{du} = 1$$

因此, Y_1 與 U 的 joint pdf

$$\begin{aligned} g(y_1, u) &= f\left(y_1, h^{-1}(u)\right) \left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| \\ &= f(y_1, u - y_1) \cdot 1 \end{aligned} \tag{3}$$

又因爲 $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_1 \\ 0 \leq y_2 \end{cases}$$

上取値 $e^{-(y_1+y_2)}$, 其它地方取値 0, 故當 $0 \leq y_1$ 且 $0 \leq u - y_1$, 亦即, (y_1, u) 在區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 \leq y_1 \\ y_1 \leq u \end{cases}$$

內時, 由 (3) 式得

$$g(y_1, u) = e^{-(y_1+u-y_1)} \cdot 1 = e^{-u}$$

當 $y_1 < 0$ 或 $u - y_1 < 0$, 亦即, (y_1, u) 在 $\overline{R_1}$ 內時, 由 (3) 式得

$$g(y_1, u) = 0 \cdot 1 = 0$$

因此, 綜合上述, 得 Y_1 與 U 的 joint pdf

$$g(y_1, u) = \begin{cases} e^{-u}, & 0 \leq y_1 \leq u \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 因爲區域 R_1 可以水平方式改寫成

$$R_1 : \begin{cases} 0 \leq u \\ 0 \leq y_1 \leq u \end{cases}$$

故對於 $u \geq 0$, 將 $g(y_1, u)$ 對 y_1 積分, 得 U 的 marginal pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, u) dy_1 \\ &= \int_0^u e^{-u} dy_1 \\ &= e^{-u} y_1 \Big|_{y_1=0}^{u} = u e^{-u} \end{aligned}$$

當 $u<0$ 時,

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} g(y_1,u)dy_1=\int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1=0$$

因此, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u)=\begin{cases} ue^{-u}, & u\ge 0 \\ 0, & u<0 \end{cases}$$

<另解> (較直接; 用分布函數法). (1) 求 $F_U(u)$: 根據 cdf 的定義以及 U 的定義, 將新隨機變數 U 以原隨機變數 Y_1 與 Y_2 表示, 得

$$\begin{aligned} & F_U(u) \\ = \ & P(U\le u) \\ = \ & P(Y_1+Y_2\le u) \\ = \ & P((Y_1,Y_2)\in\{(y_1,y_2): y_1+y_2\le u\}) \\ = \ & \iint_{\{(y_1,y_2):y_1+y_2\le u\}} f(y_1,y_2)dy_1dy_2 \end{aligned}$$

再根據 (Y_1,Y_2) 的 joint pdf $f(y_1,y_2)$ 在區域

$$R:\begin{cases} 0\le y_1 \\ 0\le y_2 \end{cases}$$

上取值 $e^{-(y_1+y_2)}$, 其它地方取值 0, 以及上式中的積分區域

$$\{(y_1,y_2): y_1+y_2\le u\}$$

爲一斜率爲 -1, 橫軸截距爲 u 的直線 $y_1 + y_2 = u$ 的左下方, 如圖示, 可得出, 當 $u < 0$ 時,

$$F_U(u) = \iint_{y_1+y_2\le u} 0 dy_1 dy_2 = 0$$

當 $0 \le u$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{\{y_1+y_2\le u\}\cap\overline{R}} 0 dy_1 dy_2 + \\ &\qquad \iint_{\{y_1+y_2\le u\}\cap R} e^{-(y_1+y_2)} dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{\{y_1+y_2\le u\}\cap R} e^{-(y_1+y_2)} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

其中的積分區域

$$\{(y_1, y_2) : y_1 + y_2 \le u\} \cap R$$

可表示成

$$\begin{cases} 0 \le y_1 \le u \\ 0 \le y_2 \le u - y_1 \end{cases}$$

因此, 由上式可得

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_0^u \int_0^{u-y_1} e^{-(y_1+y_2)} dy_2 dy_1 \\ &= \int_0^u -e^{-(y_1+y_2)}\Big|_{y_2=0}^{u-y_1} dy_1 \\ &= \int_0^u \left(e^{-y_1} - e^{-u}\right) dy_1 \\ &= -e^{-y_1} - e^{-u} y_1\Big|_0^u = 1 - e^{-u} - ue^{-u} \end{aligned}$$

最後, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 cdf

$$F_U(u) = \begin{cases} 1 - e^{-u} - ue^{-u}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

(2) 求 $f_U(u)$: 根據 pdf 與 cdf 的關係, 新隨機變數 U 的 pdf

$$\begin{aligned} & f_U(u) \\ = \ & \frac{d}{du} F_U(u) \\ = \ & \begin{cases} e^{-u} - e^{-u} + ue^{-u} = ue^{-u}, & u \geq 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

例 4. 設隨機變數 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2(1 - y_1), & 0 \leq y_1 \leq 1, \\ & 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 試求 $U = Y_1 Y_2$ 的 pdf, 與 (b) 試以 U 的 pdf 求 $E(U)$.

<解> 固定 $0 < Y_1 = y_1 \leq 1$, 則

$$U = y_1 Y_2 \stackrel{\text{def}}{=} h(Y_2)$$

乃一 Y_2 的函數. 令 $u = y_1 y_2$. 解 y_2, 得

$$y_2 = \frac{u}{y_1} = h^{-1}(u)$$

且

$$\frac{dh^{-1}}{du} = \frac{1}{y_1}$$

所以, Y_1 與 U 的 joint pdf

$$\begin{aligned} g(y_1, u) &= f\left(y_1, h^{-1}(u)\right)\left|\frac{dh^{-1}}{du}\right| \\ &= f\left(y_1, \frac{u}{y_1}\right)\left|\frac{1}{y_1}\right| \qquad (4) \end{aligned}$$

又因爲 $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{cases}$$

上取值 $2(1 - y_1)$, 且在其它地方取值 0, 故當 $0 < y_1 \le 1$ 且 $0 \le \frac{u}{y_1} \le 1$, 亦即, (y_1, u) 在區域

$$R_1 : \begin{cases} 0 < y_1 \le 1 \\ 0 \le u \le y_1 \end{cases}$$

內時, 由 (4) 式得

$$g(y_1, u) = 2(1 - y_1)\left|\frac{1}{y_1}\right| = 2(1 - y_1)\frac{1}{y_1}$$

當 $(y_1 \le 0$ 或 $y_1 > 1)$ 或 $\left(\frac{u}{y_1} < 0 \text{ 或 } \frac{u}{y_1} > 1\right)$, 亦即, (y_1, u) 在 $\overline{R_1}$ 內時, 由 (4) 式得

$$g(y_1, u) = 0 \cdot \left|\frac{1}{y_1}\right| = 0$$

因此, 綜合上述, 得 Y_1 與 U 的 joint pdf

$$g(y_1, u) = \begin{cases} 2(1-y_1)\frac{1}{y_1}, & 0 < u \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 因為區域 R_1 可以水平方向改寫成

$$R_1 : \begin{cases} 0 < u \le 1 \\ u \le y_1 \le 1 \end{cases}$$

故對於 $0 < u \le 1$, 將 $g(y_1, u)$ 對 y_1 積分, 得 U 的 marginal pdf

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, u) dy_1 \\ &= \int_u^1 2(1-y_1)\frac{1}{y_1} dy_1 \\ &= 2\ln|y_1| - 2y_1\Big|_u^1 = 2(u - \ln u - 1) \end{aligned}$$

當 $u \le 0$ 或 $u > 1$ 時,

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, u) dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0$$

因此, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 pdf

$$f_U(u) = \begin{cases} 2(u - \ln u - 1), & 0 < u \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(b) 根據期望值的定義,

$$\begin{aligned} E(U) &= \int_{-\infty}^{\infty} u f_U(u) du \\ &= \int_0^1 2u(u - \ln u - 1) du \\ &= \int_0^1 2u^2 du - \int_0^1 2u \ln u du - \int_0^1 2u du \end{aligned}$$

其中第一項與第三項的定積分分別爲

$$\int_0^1 2u^2 du = \frac{2}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

以及

$$\int_0^2 2u du = u^2 \Big|_0^1 = 1$$

且經由分部積分及羅必達定理, 得第二項的瑕積分

$$\begin{aligned} \int_0^1 2u \ln u du &= u^2 \ln u - \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^1 \\ &= \left[(1)^2 \ln 1 - \frac{1}{2}(1)^2 \right] - \\ &\quad \left[\lim_{c \to 0+} c^2 \ln c - \frac{1}{2}(0) \right] = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

最後將此三項積分的值代入上式, 得

$$E(U)=\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\frac{1}{6}$$

<另解 (a)> (直接用分布函數法). (1) 求 $F_U(u)$: 根據 cdf 的定義以及 U 的定義, 將新隨機變數 U 以原隨機變數 Y_1 與 Y_2 表示, 得

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= P(U\le u)\\
&= P(Y_1Y_2\le u)\\
&= P((Y_1,Y_2)\in\{(y_1,y_2):y_1y_2\le u\})\\
&= \iint_{\{(y_1,y_2):y_1y_2\le u\}} f(y_1,y_2)dy_1dy_2
\end{aligned}$$

再根據 (Y_1,Y_2) 的 joint pdf $f(y_1,y_2)$ 在區域

$$R:\begin{cases}0\le y_1\le 1\\ 0\le y_2\le 1\end{cases}$$

上取值 $2(1-y_1)$, 其它地方取值 0, 以及上式中的積分區域

$$\{(y_1,y_2):y_1y_2\le u\}$$

在 $u<0$ 時, 爲在第 2 與第 4 象限內雙曲線 $y_1y_2=u$ 的左上方與右下方; 在 $u=0$ 時, 爲第 2 與第 4 象限; 在 $u>0$ 時, 爲在第 1 與第 3 象限內雙曲

線 $y_1y_2 = u$ 與座標軸共同圍出的區域以及第 2 與第 4 象限, 如圖示, 因而可得出, 當 $u \le 0$ 時,

$$F_U(u) = \iint_{y_1y_2 \le u} 0 dy_1 dy_2 = 0$$

當 $0 < u \le 1$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{\{y_1y_2 \le u\} \cap \overline{R}} 0 dy_1 dy_2 + \\ &\qquad \iint_{\{y_1y_2 \le u\} \cap R} 2(1-y_1) dy_1 dy_2 \\ &= \iint_{\{y_1y_2 \le u\} \cap R} 2(1-y_1) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

其積分區域可表示成 $R_{11} \cup R_{12}$, 其中

$$R_{11} : \begin{cases} 0 \le y_1 \le u \\ 0 \le y_2 \le 1 \end{cases}$$

且

$$R_{12} : \begin{cases} u \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le u/y_1 \end{cases}$$

又 $R_{11} \cup R_{12} = R \setminus R_1$ 其中區域

$$R_1 : \begin{cases} u \le y_1 \le 1 \\ u/y_1 \le y_2 \le 1 \end{cases}$$

因此, 由上式得

$$F_U(u) = 1 - \iint_{R_1} 2(1-y_1) dy_1 dy_2$$

其中等號右邊的 1 成立乃是因爲此項等於 joint pdf $f(y_1, y_2) = 2(1 - y_1)$ 在整個 support R 上的積分, 故爲 1 所致. 再根據積分區域 R_1 的表示式, 上式又相當於

$$\begin{aligned} F_U(u) &= 1 - \int_u^1 \int_{u/y_1}^1 2(1-y_1)dy_2dy_1 \\ &= 1 - \int_u^1 2(1-y_1)y_2\Big|_{y_2=u/y_1}^1 dy_1 \\ &= 1 - \int_u^1 \left[2(1-y_1) - 2\frac{u}{y_1} + 2u\right] dy_1 \\ &= 1 - [2(1+u)(1-u) - \\ &\qquad\qquad (1-u^2) - 2u(-\ln u)] \\ &= 1 - [1 - u^2 + 2u\ln u] \\ &= u^2 - 2u\ln u \end{aligned}$$

當 $u > 1$ 時,

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \iint_{\{y_1y_2 \le u\}\cap\overline{R}} 0dy_1dy_2 + \\ &\qquad \iint_{\{y_1y_2 \le u\}\cap R} 2(1-y_1)dy_1dy_2 \\ &= \iint_R 2(1-y_1)dy_1dy_2 = 1 \end{aligned}$$

因此, 綜合上述, 得新隨機變數 U 的 cdf

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0 \\ u^2 - 2u\ln u, & 0 < u \le 1 \\ 1, & u > 1 \end{cases}$$

(2) 求 $f_U(u)$: 根據 pdf 與 cdf 的關係, 新隨機變數 U 的 pdf

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\
&= \begin{cases} 2(u - \ln u - 1), & 0 < u \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$