

單元 7: 條件機率與事件的獨立性

(課本 §2.7)

有時一事件的機率會與是否知道其它事件是否發生有關，如

- (1) 忽略每天的大氣狀況或其它事件下，給定某天的降雨率 = 經過一段長時間後，下雨天數的比率，稱作 "在給定的某一天，會下雨的無條件機率 (unconditional probability)". 若前兩天均下雨且有熱帶風暴來襲，則某天會下雨的機率顯然會受此訊息影響，故稱爲 "給定訊息下，某天會下雨的條件機率 (conditional probability)".
- (2) 投擲一公正骰子，出現 1 的無條件機率爲 $1/6$. 若已知出現奇數點，則出現的點數必爲 1, 3, 或 5, 而得到出現 1 的相對頻率爲 $1/3$, 稱作 "給定出現奇數下，出現 1 的條件機率" (與機率的相對頻率觀念吻合，亦即，3 個可能性當中的一個).

條件機率的正式定義如下：

定義 1. 給定事件 B 發生, 事件 A 的條件機率

$$P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

當 $P(B) > 0$ 時.

註. 條件機率的定義符合機率的相對頻率觀念: 設重覆實驗相當大的 N 次, 由如下的 Venn diagram, 得此 N 次可分成

$$|A \cap B| = n_{11}, \quad |A \cap \bar{B}| = n_{21}$$

以及

$$|\bar{A} \cap B| = n_{12}, \quad |\bar{A} \cap \bar{B}| = n_{22}$$

因此,

$$\begin{aligned} N &= n_{11} + n_{12} + n_{21} + n_{22} \\ |A| &= n_{11} + n_{21} \\ |B| &= n_{11} + n_{12} \end{aligned}$$

故,

$$\begin{aligned} P(A|B) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &\approx \frac{n_{11}/N}{(n_{11} + n_{12})/N} \quad (\text{相對頻率}) \\ &= \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{12}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} \end{aligned}$$

符合相對頻率的觀念. 同理,

$$\begin{aligned} P(B|A) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &\approx \frac{n_{11}/N}{(n_{11} + n_{21})/N} \\ &= \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{21}} \\ &= \frac{|A \cap B|}{|A|} \end{aligned}$$

例 1. 設投擲一公正骰子一次. 已知 $B =$ 觀察到奇數點, 且令 $A =$ 出現 1, 則

$$\begin{aligned} P(A|B) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \quad (\text{因為 } A \subset B) \\ &= \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

與前面直觀的結果吻合.

註. 若事件 A 發生的機率不受事件 B 的發生或不發生的影響, 則稱 A 與 B 相互獨立 (independent). 正式定義如下:

定義 2. 二事件 A 與 B 為獨立, 若下列任一式成立:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

否則, 稱 A 與 B 不獨立 (相關, dependent).

註. 獨立性的機率性定義與日常用語的涵義相吻合, 如

(1) "抽煙" 與 "得肺癌" 為不獨立. 因為

$$\underbrace{P(\text{得肺癌}|\text{抽煙})}_{\text{條件機率}} > \underbrace{P(\text{得肺癌})}_{\text{無條件機率}}$$

(2) "今天下雨" 與 "由今天算起, 一個月後下雨" 應是獨立的.

例 2. 考慮下列投一公正骰子所形成的事件:

A : 出現奇數點

B : 出現偶數點

C : 出現 1 或 2

試問 (a) A 與 B 為獨立事件嗎?

<解> (1) 直觀上: A 發生則 B 一定不發生, 故 A 與 B 相互影響, 得它們不獨立.

(2) 定義: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 故

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/2} = 0 \\ &\neq P(A) (= 1/2) \end{aligned}$$

因此, A 與 B 不獨立 (相關).

(b) A 與 C 為獨立事件嗎?

<解> (1) 直觀上: 已知 C 發生與否, 無法得知 A 是否會發生. 故 A 與 C 獨立.

(2) 定義:

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\text{出現 } 1)}{P(C)} \\ &= \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} \\ &= P(A) \end{aligned}$$

故它們獨立.

註. 另一求條件機率的較直觀方法:

$$P(A|C) = P(\text{出現 1 或 2 之下, 出現 1}) = \frac{1}{2}$$

例 3. 設某人隨機地針對 3 種品牌的咖啡 X, Y, Z 給予排序. 定義下列事件:

A : X 優於 Y

B : X 最好

C : X 次好

D : X 最差

試問事件 A 與事件 B, C , 或 D 獨立嗎?

<解> 此實驗的 6 個相同可能性的樣本點為:

$E_1 : XYZ, E_2 : XZY, E_3 : YXZ$

$E_4 : YZX, E_5 : ZXY, E_6 : ZYX$

則

$$A = \{E_1, E_2, E_5\}, \quad B = \{E_1, E_2\}$$

$$C = \{E_3, E_5\}. \quad D = \{E_4, E_6\}$$

且

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(E_5)}{P(C)} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\emptyset)}{P(D)} = 0$$

因此,

- A 與 B : 不獨立 (直觀: 已知 B 發生, A 一定發生)
- A 與 C : 獨立 (直觀: 已知 C 發生與否, 無法得知 A 是否會發生)
- A 與 D : 不獨立 (直觀: 已知 D 發生, A 一定不發生)