單元 10: 全機率律與貝氏法則
(課本 §2.10)

定義 1. 稱 $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ 爲 S 的一分割 (partiton), 若下列二項成立:

(1) $S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$

(2) $B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j$

定理 2.8 (全機率律, Law of Total Probability). 設 $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ 爲 S 的一分割且 $P(B_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$. 則對任一事件 A,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

<證> 因爲 $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ 爲 S 的一分割, 可得

$$\begin{aligned} A &= A \cap S \\ &= A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k) \\ &= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k) \end{aligned}$$

(根據分配律)

且 $A \cap B_i$ 間互斥, 如下圖所示:

接著根據互斥事件的加法律以及乘法律, 得

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + \\ &\qquad P(A \cap B_k) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \\ &\qquad \cdots + P(A|B_K)P(B_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

註. 經常直接求 $P(A)$ 不易, 但容易求 A 的條件機率 $P(A|B_i)$, 而以全機率律間接地求 $P(A)$.

定理 2.9 (貝氏法則, Bayes' Rule). 設 $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ 為 S 的一分割且 $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 則對任一事件 A,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

<證> 首先根據條件機率的定義,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

接著應用乘法律於上式的分子, 可得

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

最後將全機率律作用於上式的分母, 得

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

註. 設有 k 種原因 $B_1, \ldots, B_k$ 可導致結果 A, 且每種原因下導致結果的機率 ($P(A|B_i)$) 以及每種原因發生的機率 ($P(B_i)$) 均已知 (可求得), 則探究結果 A 是由第 j 種原因造成的機率 $\Leftrightarrow$ 求 $P(B_j|A)$, 可由貝氏法則計算出.

例 1. 5 條生產線以相同的速率生產保險絲, 在正常情況下會隨機地產生出 2% 的瑕疵品. 各線以 100 個一捆的方式包裝好並運送出. 若在 3 月時, 生產線 1 的瑕疵率增爲 5%. 今由 3 月所出的產品中, 任選一捆, 檢測其中 3 個, 發現有一個壞掉, 問此捆是由生產線 1 製造的機率爲何? 來自於其他 4 條生產線的機率又爲何?

<解> 令事件 $D =$ 檢視一捆中的 3 個且有一個壞掉的事件. 又令事件 $L_1 =$ 產品來自生產線 1 的事件. 則對

應的 Venn diagram 如圖示, 且題意乃相當於求

$$P(L_1|D)$$

亦即, 求結果出自於某一原因的機率. 因此, 根據貝氏法則, 需先求出所有原因, 如 L_1 與 $\overline{L_1}$, 發生的機率, 以及在各個原因下結果發生的機率, 如下所述. 首先, 因爲有 5 條速率相同的生產線, 故每條線生產的數量比率是相同的, 而得

$$P(L_1) = 0.2$$

另生產線 1 的瑕疵率爲 0.05, 可得

$$P(D|L_1) = 3(0.05)(0.95)^2 = 0.135375$$

同理,

$$P(\overline{L_1}) = 1 - P(L_1) = 1 - 0.2 = 0.8$$

且

$$P(D|\overline{L_1}) = 3(0.02)(0.98)^2 = 0.057624$$

因爲其它線的瑕疵率均爲 0.02.

接著根據全機率律,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|L_1)P(L_1) + P(D|\overline{L_1})P(\overline{L_1}) \\ &= (0.135375)(0.2) + (0.057624)(0.8) \\ &= 0.0731742 \end{aligned}$$

最後, 根據貝氏法則,

$$\begin{aligned} P(L_1|D) &= \frac{P(D|L_1)P(L_1)}{P(D)} \\ &= \frac{(0.135375)(0.2)}{0.0731742} \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} &P(\text{結果出自於其他 4 條生產線}) \\ &\quad = 1 - P(L_1|D) = 1 - 0.37 = 0.63 \end{aligned}$$