單元 35: 邊際及條件機率分布
(課本 §5.3)

定義. (a) 設聯合離散隨機變數

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{ joint pmf } p(y_1, y_2)$$

則 Y_1 的邊際機率質量函數 (marginal pmf)

$$\begin{aligned} p_1(y_1) &\stackrel{\text{def}}{=} P(Y_1 = y_1) \\ &= \sum_{y_2} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \\ &= \sum_{y_2} p(y_1, y_2) \end{aligned}$$

其中累加和的範圍是涵蓋所有可能的 y_2; 同理, Y_2 的 marginal pmf

$$\begin{aligned} p_2(y_2) &\stackrel{\text{def}}{=} P(Y_2 = y_2) \\ &= \sum_{y_1} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) \\ &= \sum_{y_1} p(y_1, y_2) \end{aligned}$$

(b) 設聯合連續隨機變數

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{joint pdf } f(y_1, y_2)$$

則 Y_1 的邊際機率密度函數 (marginal pdf)

$$f_1(y_1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2$$

且 Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1$$

例 1. 由 3 位共和黨員, 2 位民主黨員, 與 1 位獨立黨員中, 任選 2 人組成一委員會. 令 $Y_1 =$ 委員會中共和黨員數且 $Y_2 =$ 委員會中民主黨員數. 試求 Y_1 與 Y_2 的 joint pmf, 並求 Y_1 的 marginal pmf.

<解> 根據多項分布,

$$\begin{aligned} p(1,1) &= P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} \\ &= \frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{6}{15} \end{aligned}$$

同理, 可得其它的機率值如下述,

$$\begin{aligned} p(0,0) &= P(\text{選出兩位獨立黨員}) \\ &= P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

$$p(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{15}$$

$$p(0,2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$$

$$p(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

$$p(2,0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

以及

$$p(1,2) = p(2,1) = p(2,2) = P(\emptyset) = 0$$

此乃因爲委員會只由 2 人組成, 並可列表如下:

	y_1			
y_2	0	1	2	Total
0	0	3/15	3/15	6/15
1	2/15	6/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
Total	3/15	9/15	3/15	

又根據邊際機率質量函數的定義, Y_1 的 marginal pmf

如下:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p(0,0)+p(0,1)+p(0,2) \\ &= 0+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{3}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1(1) &= p(1,0)+p(1,1)+p(1,2) \\ &= \frac{3}{15}+\frac{6}{15}+0=\frac{9}{15} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} p_1(2) &= p(2,0)+p(2,1)+p(2,2) \\ &= \frac{3}{15}+0+0=\frac{3}{15} \end{aligned}$$

均為各行項的和. 因為置於表格的旁邊 (底邊), 故稱作邊際機率質量函數 (marginal pmf). 同理, 各列項的和為 Y_2 的 marginal pmf, 且位於表格的右邊.

例 2. 設聯合連續隨機變數 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1,y_2)=\begin{cases} 2y_1, & 0\le y_1\le 1,\, 0\le y_2\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試繪 $f(y_1,y_2)$ 的圖形, 並求 Y_1 與 Y_2 的 marginal pdf.

<解> $f(y_1,y_2)$ 的圖形如下所示.

觀察:

(1) 累積方向爲 "平行於 y_2-軸" 時, Y_1 的 marginal pdf 爲三角形分布, 如圖所示.

(2) 累積方向爲 "平行於 y_1 軸" 時, Y_2 的 marginal pdf 爲均勻分布, 如圖所示.

實際求法如下:

(1) Y_1 的 marginal pdf: 對於 $0 \le y_1 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_0^1 2y_1 dy_2 \\ &= 2y_1 y_2 \Big|_{y_2=0}^{1} = 2y_1 \end{aligned}$$

對於 $y_1 < 0$ 或 $y_1 > 1$,

$$\begin{aligned} f_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_2 = 0 \end{aligned}$$

因此, 綜合上述, Y_1 的 marginal pdf

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

如圖所示.

(2) Y_2 的 marginal pdf: 對於 $0 \le y_2 \le 1$,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_0^1 2y_1 dy_1 \\ &= y_1^2 \Big|_{y_1=0}^{1} = 1 \end{aligned}$$

另 $y_2 < 0$ 或 $y_2 > 1$ 時,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0 \end{aligned}$$

因此, 綜合上述, 得 Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 1, & 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

如圖所示.

定義. 設聯合離散隨機變數

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{ joint pmf } p(y_1, y_2)$$

且 Y_1 與 Y_2 的 marginal pmf 分別爲 $p_1(y_1)$ 與 $p_2(y_2)$. 則給定 $Y_2 = y_2$ 下, Y_1 的條件機率質量函數 (conditional pmf)

$$\begin{aligned} p(y_1|y_2) &\overset{\text{def}}{=} P(Y_1 = y_1|Y_2 = y_2) \\ &= \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)}{P(Y_2 = y_2)} \\ &= \frac{p(y_1, y_2)}{p_2(y_2)} \end{aligned}$$

當 $p_2(y_2) > 0$ 時.

註. 若 $p_2(y_2) = 0$ 時, 則 $p(y_1|y_2)$ 未定義.

同理, 給定 $Y_1 = y_1$ 下, Y_2 的 conditional pmf

$$\begin{aligned} p(y_2|y_1) &\overset{\text{def}}{=} P(Y_2 = y_2|Y_1 = y_1) \\ &= \frac{P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)}{P(Y_1 = y_1)} \\ &= \frac{p(y_1, y_2)}{p_1(y_1)} \end{aligned}$$

當 $p_1(y_1) > 0$ 時.

註. 若 $p_1(y_1) = 0$ 時, 則 $p(y_2|y_1)$ 未定義.

例 3. 承接例 1, 試求給定 $Y_2 = 1$ 下, Y_1 的條件機率質量函數 (conditional pmf), 亦即, 當委員會中有一人爲民主黨員時, 共和黨員數的條件分布.

<解> 由例 1, joint pmf $p(y_1, y_2)$ 及 marginal pmf $p_1(y_1)$, $p_2(y_2)$ 如下表:

	y_1			
y_2	0	1	2	Total
0	0	3/15	3/15	6/15
1	2/15	6/15	0	8/15
2	1/15	0	0	1/15
Total	3/15	9/15	3/15	

接著, 求給定 $Y_2 = 1$, Y_1 的 conditional pmf $p(y_1|Y_2 = 1)$ 時, 只需看 $(Y_2 = 1)$ 所對應的列即可, 如下述.

$$p(0|Y_2 = 1) = \frac{p(0,1)}{p_2(1)} = \frac{2/15}{8/15} = \frac{1}{4}$$

以及

$$p(1|Y_2 = 1) = \frac{p(1,1)}{p_2(1)} = \frac{6/15}{8/15} = \frac{3}{4}$$

和

$$p(2|Y_2=1)=\frac{p(2,1)}{p_2(1)}=\frac{0}{8/15}=0$$

因此, 給定 $Y_2=1$, Y_1 的 conditional pmf

$$p(y_1|Y_2=1)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & y_1=0\\ \frac{3}{4}, & y_1=1\end{cases}$$

同理, 給定 $Y_2=0$, Y_1 的 conditional pmf

$$p(y_1|Y_2=0)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & y_1=1\\ \frac{1}{2}, & y_1=2\end{cases}$$

以及給定 $Y_2=2$ 時, Y_1 的 conditional pmf

$$p(y_1|Y_2=2)=1,\ y_1=0$$

註 1. 固定給定的 $Y_2=y_2$ 時, conditional pmf $p(y_1|y_2)$ 本身爲一可能値爲 y_1 的隨機變數的 pmf.

註 2. 條件機率質量函數 (conditional pmf) $p(y_1|y_2)$ 隨著 Y_2 的觀察值而變.

註 3. 給定 $Y_1=y_1$, Y_2 的 conditional pmf 如下:

$$p(y_2|Y_1=0)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & y_2=1\\ \frac{1}{3}, & y_2=2\end{cases}$$

$$p(y_2|Y_1=1)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & y_2=0\\ \frac{2}{3}, & y_2=1\end{cases}$$

以及

$$p(y_2|Y_1=2)=1,\ y_2=0$$

亦反應出固定給定的 $Y_1=y_1$, $p(y_2|y_1)$ 本身爲一可能值爲 y_2 的隨機變數的 pmf, 以及隨著 Y_1 的觀察值而變.

註 4. 若 Y_1 與 Y_2 爲聯合連續隨機變數, 則無法定義 $P(Y_1=y_1|Y_2=y_2)$ 或 $P(Y_2=y_2|Y_1=y_1)$, 因爲此時 $P(Y_2=y_2)$ 與 $P(Y_1=y_1)$ 均恆爲 0. 但可透過如下定義的條件累積分布函數 (conditional cdf) 著手.

定義. 設聯合連續隨機變數

$$(Y_1,Y_2)\sim \text{ joint pdf } f(y_1,y_2)$$

則給定 $Y_2=y_2$, Y_1 的 conditional cdf

$$F(y_1|y_2)\overset{\text{def}}{=}P(Y_1\le y_1|Y_2=y_2)$$

註. 固定給定值 $Y_2=y_2$, conditional cdf $F(y_1|y_2)$ 爲一 y_1 的函數, 且本身爲一可能值爲 y_1 的隨機變數的 cdf.

同理, 給定 $Y_1 = y_1$, Y_2 的 conditional cdf

$$F(y_2|y_1) \overset{\text{def}}{=} P(Y_2 \leq y_2|Y_1 = y_1)$$

註. 固定給定的 $Y_1 = y_1$, $F(y_2|y_1)$ 本身爲一可能值爲 y_2 的隨機變數的 cdf.

註. 因爲 Y_2 落在 y_2 附近小區間的機率近似於

$$f_2(y_2)dy_2$$

故由全機率律的概念,

$$\begin{aligned} F(y_1) &= P(Y_1 \leq y_1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y_1 \leq y_1|Y_2 = y_2) f_2(y_2)dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y_1|y_2) f_2(y_2)dy_2 \qquad (1) \end{aligned}$$

又因爲 Y_1 的 marginal pdf 爲 $f_1(y_1)$, 故

$$\begin{aligned} F(y_1) &= P(Y_1 \leq y_1) \\ &= \int_{-\infty}^{y_1} f_1(t_1)dt_1 \\ &= \int_{-\infty}^{y_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, y_2)dy_2\right] dt_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{y_1} f(t_1, y_2)dt_1\right] dy_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

比較 (1) 式與 (2) 式, 得

$$F(y_1|y_2)f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{y_1} f(t_1, y_2)dt_1$$

或

$$F(y_1|y_2) = \int_{-\infty}^{y_1} \frac{f(t_1, y_2)}{f_2(y_2)}dt_1$$

所以, 由 cdf 與 pdf 之間的關係, 可稱上式中的被積函數

$$\frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

爲給定 $Y_2 = y_2$ 下, Y_1 的 conditional pdf, 並以 $f(y_1|y_2)$ 表示之. 正式定義如下.

定義. 設聯合連續隨機變數

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{ joint pdf } f(y_1, y_2)$$

且 Y_1 與 Y_2 的 marginal pdf 分別爲 $f_1(y_1)$ 與 $f_2(y_2)$. 則對任意使得 $f_2(y_2) > 0$ 的 y_2, 給定 $Y_2 = y_2$, Y_1 的 conditional pdf

$$f(y_1|y_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

註. 固定給定的 $Y_2 = y_2$, $f(y_1|y_2)$ 本身爲一可能值爲 y_1 的隨機變數的 pdf. 又隨著 Y_2 的觀察值而變.

同理, 對任意使得 $f_1(y_1) > 0$ 的 y_1, 給定 $Y_1 = y_1$, Y_2 的 conditional pdf

$$f(y_2|y_1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)}$$

註. 固定給定的 $Y_1 = y_1$, $f(y_2|y_1)$ 本身爲一可能值爲 y_2 的隨機變數的 pdf. 又隨著 Y_1 的觀察值而變.

註 1. 若 $f_2(y_2) = 0$, 則 $f(y_1|y_2)$ 未定義. 同理, 若 $f_1(y_1) = 0$, $f(y_2|y_1)$ 亦未定義.

註 2. 綜合 conditional cdf 與 conditional pdf 的定義, 得

$$F(y_2|y_1) = \int_{-\infty}^{y_2} f(t_2|y_1)dt_2$$

與

$$F(y_1|y_2) = \int_{-\infty}^{y_1} f(t_1|y_2)dt_1$$

例 4. 設一飲料機內含 Y_2 加侖的飲料且銷售量爲 Y_1 加侖, 故 $Y_1 \le Y_2$. 又

$$(Y_1, Y_2) \sim f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le y_1 \le y_2 \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 (a) 給定 $Y_2 = y_2$, Y_1 的 conditional pdf, 以及 (b) P(銷售量 $\leq 1/2|$ 機器內含1.5).

<解> (a) 先求 Y_2 的 marginal pdf $f_2(y_2)$: 首先 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 2 \\ 0 \leq y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

上取正值 $\frac{1}{2}$, 其它地方取值爲 0, 如圖示.

註. 因爲 R 的面積爲 $\frac{1}{2}(2)(2) = 2$, 所以

$$(Y_1, Y_2) \sim \text{unif}(R)$$

接著, 當 $0 \leq y_2 \leq 2$ 時,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_0^{y_2} \frac{1}{2} dy_1 \\ &= \frac{1}{2} y_1 \Big|_{y_1=0}^{y_2} = \frac{1}{2} y_2 \end{aligned}$$

當 $y_2 < 0$ 或 $y_2 > 2$ 時,

$$\begin{aligned} f_2(y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 dy_1 = 0 \end{aligned}$$

因此, 綜合上述, Y_2 的 marginal pdf

$$f_2(y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}y_2, & 0 \le y_2 \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

最後, 根據 conditional pdf 的定義, 對於 $0 < y_2 \le 2$ (因為此時 $f_2(y_2) > 0$), 給定 $Y_2 = y_2$, Y_1 的 conditonal pdf

$$\begin{aligned} f(y_1|y_2) &= \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)} \\ &= \begin{cases} \frac{1/2}{(1/2)y_2} = \frac{1}{y_2}, & 0 \le y_1 \le y_2 \\ \frac{0}{(1/2)y_2} = 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

又 $y_2 \le 0$ 或 $y_2 > 2$ 時, $f(y_1|y_2)$ 未定義, 因為此時 $f_2(y_2) = 0$.

(b) 根據題意,

$$\begin{aligned} \text{所求} &= P(Y_1 \le 1/2 | Y_2 = 1.5) \\ &= \int_{-\infty}^{1/2} f(y_1|y_2 = 1.5)dy_1 \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1.5} dy_1 \\ &= \frac{1}{1.5} y_1 \Big|_0^{1/2} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃根據註 2, 第三個等號成立乃根據 (3) 式, 得

$$f(y_1|y_2 = 1.5) = \frac{1}{1.5}, \; 0 \le y_1 \le 1.5$$

所致.

註. 觀察不同 Y_2 值的條件機率, 如

$$\begin{aligned} P(Y_1 \le 1/2|Y_2 = 2) &= \int_{-\infty}^{1/2} f(y_1|y_2 = 2)dy_1 \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{2}dy_1 \\ &= \frac{1}{2}y_1\Big|_{y_1=0}^{1/2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & P(Y_1 \le 1/2|Y_2 = 1/3) \\ &= \int_{-\infty}^{1/2} f(y_1|y_2 = 1/3)dy_1 \\ &= \int_0^{1/3} 3dy_1 \\ &= 3y_1\Big|_0^{1/3} = 1 \end{aligned}$$

一合理的結果, 其中第二個等號成立乃因爲

$$f(y_1|y_2 = 1/3) = 3, \; 0 \le y_1 \le \frac{1}{3}$$

所致. 另外, 由此例亦反應出條件機率隨著 Y_2 的觀察值而變!!