單元 39: 二隨機變數的共變異數
(課本 §5.7)

二隨機變數間的線性關聯 (linear dependence) 可由如下定義的共變異數度量之.

定義. 若隨機變數 Y_1 與 Y_2 的期望值分別爲 μ_1 與 μ_2, 則 Y_1 與 Y_2 的共變異數 (covariance)

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) \stackrel{\text{def}}{=} E[(Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2)]$$

註 1. $|\text{Cov}(Y_1, Y_2)|$ 愈大可導出愈強的線性關聯 (larger linear dependence). 直觀的理由如下:

(1) $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ 爲正值可導出 "當 $Y_2 \uparrow$" 乃相當於 "當 $Y_1 \uparrow$", 如圖示.

(2) Cov(Y$_1$, Y$_2$) 爲負值可導出 "當 $Y_2 \uparrow$" 乃相當於 "當 $Y_1 \downarrow$", 如圖示.

(3) $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ 爲 0 可導出無線性關聯, 如圖示.

註 2. 因爲 $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ 與度量尺度 (scale of measurement) 有關, 故無法作爲線性關聯的絕對度量 (absolute measure), 亦即, 無法直接由其值說明此值到底是大還是小, 但做如下的標準化後可改善之. 定義相關係數 (correlation coefficient)

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

其中 σ_1 與 σ_2 分別爲 Y_1 與 Y_2 的標準差.

相關係數 ρ 的性質:

(1) $-1 \le \rho \le 1$.

(2) 相關係數 ρ 的符號與共變異數 $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$ 的符號相同. 因此,

(ii) $\rho > 0$ 可導出 "$Y_2 \uparrow$" 乃相當於 "$Y_1 \uparrow$", 且 $\rho \uparrow 1$ 表示愈線性正相關; $\rho = 1$ 表示完美相關 (perfect correlation), 此時所有點落在一正斜率的直線上.

(ii) $\rho = 0$ 可導出 "零共變異數以及無相關 (no correlation).

(iii) $\rho < 0$ 可導出 "$Y_2 \uparrow$" 乃相當於 "$Y_1 \downarrow$, 且 $\rho \downarrow -1$ 表示愈線性負相關; $\rho = -1$ 表示完美相關, 此時所有點落在一斜率爲負的直線上.

另一方便於計算共變異數的公式如下定理所述.

定理 5.10. 令二隨機變數 Y_1 與 Y_2 的期望值分別爲 μ_1 與 μ_2. 則

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Y_1Y_2) - \mu_1\mu_2 \\ &\overset{\text{或}}{=} E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) \end{aligned}$$

亦即,

$\text{Cov}(Y_1, Y_2) =$ (乘積的期望值) – (個別期望值的乘積)

<證> 根據共變異數的定義以及期望值的線性性質,

$$\begin{aligned} &\text{Cov}(Y_1, Y_2) \\ &= E[(Y_1 - \mu_1)(Y_2 - \mu_2)] \\ &= E[Y_1Y_2 - \mu_1Y_2 - \mu_2Y_1 + \mu_1\mu_2] \\ &= E(Y_1Y_2) - \mu_1E(Y_2) - \mu_2E(Y_1) + \mu_1\mu_2 \\ &= E(Y_1Y_2) - \mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_1 + \mu_1\mu_2 \\ &= E(Y_1Y_2) - \mu_1\mu_2 \end{aligned}$$

例 1. 承接石油庫存與銷售的例子, 其中 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 3y_1, & 0 \le y_2 \le y_1 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$.

<解> 由前面的例子, 已求得

$$E(Y_1) = \frac{3}{4} \quad \text{與} \quad E(Y_2) = \frac{3}{8}$$

故僅需計算 $E(Y_1Y_2)$. 因爲 joint pdf $f(y_1, y_2)$ 在區域

$$R : \begin{cases} 0 \le y_1 \le 1 \\ 0 \le y_2 \le y_1 \end{cases}$$

上取值 $3y_1$, 其它地方取值 0, 所以根據隨機變數函數的期望值公式,

$$\begin{aligned} E(Y_1Y_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1y_2f(y_1, y_2)dy_2dy_1 \\ &= \int_0^1\int_0^{y_1} y_1y_2(3y_1)dy_2dy_1 \\ &= \int_0^1 3y_1^2\left[\frac{1}{2}y_2^2\bigg|_{y_2=0}^{y_1}\right]dy_1 \\ &= \int_0^1 3y_1^2 \cdot \frac{1}{2}y_1^2dy_1 \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5}y_1^5\bigg|_{y_1=0}^{1} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

因此, Y_1 與 Y_2 的共變異數

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) \\ &= \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} \\ &= \frac{48-45}{160} = \frac{3}{160}\end{aligned}$$

註. 因為大的 Y_2 值僅可能發生在大的 Y_1 值之下, 且大的 Y_1 值導致大的密度值 $f(y_1, y_2)$, 故直觀上, Y_1 與 Y_2 的共變異數應為正.

例 2. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pdf

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1, & 0 \le y_1 \le 1, 0 \le y_2 \le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

試求 $\text{Cov}(Y_1, Y_2)$.

<解> 於 §5.1 例 1 中, 曾計算出

$$E(Y_1) = \frac{2}{3},\ E(Y_2) = \frac{1}{2},\ \text{以及 } E(Y_1Y_2) = \frac{1}{3}$$

故, Y_1 與 Y_2 的共變異數

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0\end{aligned}$$

因此, Y_1 與 Y_2 不 (無) 相關 (no correlation).

註. 此例中, Y_1 與 Y_2 相互獨立.

問. 獨立性 $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ 無相關.

答. 會, 如下定理所述.

定理 5.11. 若 Y_1 與 Y_2 相互獨立, 則

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$$

<證> 根據定理 5.10 的共變異數公式,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Y_1 Y_2) - \mu_1 \mu_2 \\ &= E(Y_1)E(Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因爲 Y_1 與 Y_2 相互獨立, 由定理 5.9 得

$$E(Y_1 Y_2) = E(Y_1)E(Y_2)$$

所致.

註. "$\Leftarrow$" 不成立, 亦即, $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ 不保證 Y_1 與 Y_2 相互獨立. 反例如下.

例 3. 設 (Y_1, Y_2) 的 joint pmf 如下表:

	y_1		
y_2	-1	0	$+1$
-1	$1/16$	$3/16$	$1/16$
0	$3/16$	0	$3/16$
$+1$	$1/16$	$3/16$	$1/16$

試證 $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ 但 Y_1 與 Y_2 卻不相互獨立.

<證> (i) Y_1 與 Y_2 不相互獨立: 首先,

$$p_1(-1) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

且

$$p_2(-1) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

但

$$p(-1,-1) = \frac{1}{16} \neq p_1(-1) \cdot p_2(-1) = \frac{25}{256}$$

由此, 足以說明 Y_1 與 Y_2 不相互獨立.

(ii) Y_1 的 marginal pmf 爲

$$p_1(-1) = \frac{5}{16},\ p_1(0) = \frac{6}{16},\ p_1(1) = \frac{5}{16}$$

由此導出 Y_1 的期望值

$$E(Y_1) = -1 \cdot \frac{5}{16} + 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} = 0$$

同理, Y_2 的 marginal pmf 爲

$$p_2(-1) = \frac{5}{16},\ p_2(0) = \frac{6}{16},\ p_2(1) = \frac{5}{16}$$

所以, Y_2 的期望值

$$E(Y_2) = -1 \cdot \frac{5}{16} + 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{5}{16} = 0$$

又根據隨機變數函數的期望值公式,

$$\begin{aligned}
&E(Y_1Y_2) \\
&= \sum_{y_1=-1}^{1} \sum_{y_2=-1}^{1} y_1 y_2 p(y_1, y_2) \\
&= -1 \cdot -1 \cdot \frac{1}{16} + -1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{16} + -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} + \\
&\qquad 0 \cdot -1 \cdot \frac{3}{16} + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot \frac{3}{16} + \\
&\qquad 1 \cdot -1 \frac{1}{16} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} \\
&= \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 0 + \left(\frac{-1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 0
\end{aligned}$$

因此, Y_1 與 Y_2 的共變異數

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) \\ &= 0 - (0)(0) = 0 \end{aligned}$$

但卻不相互獨立.