單元 7: 條件機率與事件的獨立性
(課本 §2.7)

有時一事件的機率會與是否知道其它事件是否發生有關, 如

(1) 忽略每天的大氣狀況或其它事件下, 給定某天的降雨率 = 經過一段長時間後, 下雨天數的比率, 稱作 "在給定的某一天, 會下雨的無條件機率 (unconditional probability)". 若前兩天均下雨且有熱帶風暴來襲, 則某天會下雨的機率顯然會受此訊息影響, 故稱為 "給定訊息下, 某天會下雨的條件機率 (conditional probability)".

(2) 投擲一公正骰子, 出現 1 的無條件機率為 1/6. 若已知出現奇數點, 則出現的點數必為 1, 3, 或 5, 而得到出現 1 的相對頻率為 1/3, 稱作 "給定出現奇數下, 出現 1 的條件機率" (與機率的相對頻率觀念吻合, 亦即, 3 個可能性當中的一個).

條件機率的正式定義如下:

定義 1. 給定事件 B 發生, 事件 A 的條件機率

$$P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

當 $P(B) > 0$ 時.

註. 條件機率的定義符合機率的相對頻率觀念: 設重覆實驗相當大的 N 次, 由如下的 Venn diagram, 得此 N 次可分成

$$|A\cap B| = n_{11},\ |A\cap \overline{B}| = n_{21}$$

以及

$$|\overline{A}\cap B| = n_{12},\ |\overline{A}\cap \overline{B}| = n_{22}$$

因此,

$$\begin{aligned} N &= n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22} \\ |A| &= n_{11}+n_{21} \\ |B| &= n_{11}+n_{12} \end{aligned}$$

故,

$$\begin{aligned} P(A|B) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ &\approx \frac{n_{11}/N}{(n_{11}+n_{12})/N} \ (\text{相對頻率}) \\ &= \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{12}} = \frac{|A\cap B|}{|B|} \end{aligned}$$

符合相對頻率的觀念. 同理,

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\
&\approx \frac{n_{11}/N}{(n_{11}+n_{21})/N} \\
&= \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{21}} \\
&= \frac{|A\cap B|}{|A|}
\end{aligned}
$$

例 1. 設投擲一公正骰子一次. 已知 $B =$ 觀察到奇數點, 且令 $A =$ 出現 1, 則

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A)}{P(B)} \text{ (因為 } A\subset B) \\
&= \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

與前面直觀的結果吻合.

註. 若事件 A 發生的機率不受事件 B 的發生或不發生的影響, 則稱 A 與 B 相互獨立 (independent). 正式定義如下:

定義 2. 二事件 A 與 B 爲獨立, 若下列任一式成立:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B) \end{aligned}$$

否則, 稱 A 與 B 不獨立 (相關, dependent).

註. 獨立性的機率性定義與日常用語的涵義相吻合, 如

(1) "抽煙" 與 "得肺癌" 爲不獨立. 因爲

$$\underbrace{P(\text{得肺癌}|\text{抽煙})}_{\text{條件機率}} > \underbrace{P(\text{得肺癌})}_{\text{無條件機率}}$$

(2) "今天下雨" 與 "由今天算起, 一個月後下雨" 應是獨立的.

例 2. 考慮下列投一公正骰子所形成的事件:

A : 出現奇數點

B : 出現偶數點

C : 出現 1 或 2

試問 (a) A 與 B 為獨立事件嗎?

<解> (1) 直觀上: A 發生則 B 一定不發生, 故 A 與 B 相互影響, 得它們不獨立.

(2) 定義: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 故

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/2} = 0 \\ &\neq P(A)\ (= 1/2) \end{aligned}$$

因此, A 與 B 不獨立 (相關).

(b) A 與 C 為獨立事件嗎?

<解> (1) 直觀上: 已知 C 發生與否, 無法得知 A 是否會發生. 故 A 與 C 獨立.

(2) 定義:

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\text{出現 } 1)}{P(C)} \\ &= \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} \\ &= P(A) \end{aligned}$$

故它們獨立.

註. 另一求條件機率的較直觀方法:

$$P(A|C) = P(\text{出現 1 或 2 之下, 出現 1}) = \frac{1}{2}$$

例 3. 設某人隨機地針對 3 種品牌的咖啡 X, Y, Z 給予排序. 定義下列事件:

$$\begin{aligned} A &: X \text{ 優於 } Y \\ B &: X \text{ 最好} \\ C &: X \text{ 次好} \\ D &: X \text{ 最差} \end{aligned}$$

試問事件 A 與事件 B, C, 或 D 獨立嗎?

<解> 此實驗的 6 個相同可能性的樣本點為:

$$\begin{aligned} &E_1 : XYZ,\ E_2 : XZY,\ E_3 : YXZ \\ &E_4 : YZX,\ E_5 : ZXY,\ E_6 : ZYX \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} A &= \{E_1, E_2, E_5\}, \qquad & B &= \{E_1, E_2\} \\ C &= \{E_3, E_5\}. \qquad & D &= \{E_4, E_6\} \end{aligned}$$

且

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1}{2} \\
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \\
P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(E_5)}{P(C)} = \frac{1}{2} \\
P(A|D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(\emptyset)}{P(D)} = 0
\end{aligned}
$$

因此,

- A 與 B: 不獨立 (直觀: 已知 B 發生, A 一定發生)
- A 與 C: 獨立 (直觀: 已知 C 發生與否, 無法得知 A 是否會發生)
- A 與 D: 不獨立 (直觀: 已知 D 發生, A 一定不發生)