單元 25: 連續隨機變數的期望值
(課本 §4.3)

定義 1. 設連續隨機變數 $Y \sim f(y)$, 則

$$E(Y) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y) dy < \infty$$

註. 若 Y: 離散 $\sim$ (pmf) $p(y)$, 則

$$E(Y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{y} y p(y)$$

與上式在型式上一致, 因爲在 y 附近的機率爲

$$f(y)dy$$

且積分由和演變而來, 故

$$\sum_{y} y p(y) \ \leftrightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

定理 4.4. 設連續隨機變數 $Y \sim f(y)$ (pdf), 且 $g(Y)$ 爲 Y 的函數, 則

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy$$

當積分存在時.

<證> (略) 與定理 3.2 的證明類似.

定理 4.5. 設 c 爲一常數且 $g(Y)$, $g_1(Y)$, $g_2(Y)$, $\ldots$, $g_k(Y)$ 爲 $Y \sim f(y)$ 的函數, 則下列各式成立:

(1) 常數的期望值等於常數本身:

$$E(c) = c$$

(2) 純量乘積的期望值等於純量與期望值的乘積:

$$E[cg(Y)] = cE[g(Y)]$$

(3) 和的期望值等於期望值的和:

$$\begin{aligned} & E[g_1(Y) + g_2(Y) + \cdots + g_k(Y)] \\ & \quad = E[g_1(Y)] + E[g_2(Y)] + \cdots + E[g_k(Y)] \end{aligned}$$

註 1. 定理 4.5 的 (2) 與 (3) 合併成期望值的線性性 (linearity), 亦即, 對任意的常數 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 以及任

意的 Y 的函數 $g_1(Y), g_2(Y), \ldots, g_k(Y)$,

$$
\begin{aligned}
& E[c_1g_1(Y) + c_2g_2(Y) + \cdots + c_kg_k(Y)] \\
& \quad = \; c_1E[g_1(Y)] + c_2E[g_2(Y)] + \cdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + c_kE[g_k(Y)]
\end{aligned}
$$

也就是說, 線性組合的期望值等於對應的期望值的線性組合.

註 2. 與離散情況一樣,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) & \overset{\mathrm{def}}{=} E[(Y-\mu)^2] \\
& = E[Y^2 - 2Y\mu + \mu^2] \\
& = E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2 \text{ (定理 4.5)} \\
& = E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
& = E(Y^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

例 1. 設

$$
Y \sim f(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2, & 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
$$

試求 $E(Y)$ 與 $\mathrm{Var}(Y)$.

<解> 首先根據期望值的定義,

$$
E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy
$$

接著根據 pdf $f(y)$ 的不同表示式, 將在整個實數線上的積分分割成 3 個區間上的積分, 而得

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{2} y \cdot \frac{3}{8}y^2 dy + \int_{2}^{\infty} 0dy \\
&= 0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}y^4 \Big|_0^2 + 0 \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}(16) = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

又根據隨機變數的函數的期望值公式以及同樣的分割,

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y) dy \\
&= \int_{0}^{2} y^2 \frac{3}{8} y^2 dy \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} y^5 \Big|_0^2 \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5}(32) = \frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

故,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\
&= \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
&= \frac{48-45}{20} = \frac{3}{20}
\end{aligned}
$$