單元 8: 機率的二律
(課本 §2.8)

計算事件的聯集或交集的機率的二律, 在以事件組合法求機率中, 扮演重要的角色, 如下述.

定理 2.5 (機率的乘法律, Multiplicative Law of Probability). 二事件 A 與 B 的交集的機率

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= P(B)P(A|B) \end{aligned}$$

若 A 與 B 相互獨立, 則

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

<證> 由條件機率的定義,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

得

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

或由

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

得

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

由獨立性的定義, 當 A 與 B 相互獨立時,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

註. 乘法律的推廣:

(1) 三事件 A, B, C 的交集的機率

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

因爲

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P((A \cap B) \cap C) \\ &= P(A \cap B)P(C|A \cap B) \\ &\quad \text{(由定理 2.5)} \\ &= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) \\ &\quad \text{(由定理 2.5)} \end{aligned}$$

(2) k 個事件 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 的交集的機率

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k) \\ &\quad = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \\ &\qquad P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \end{aligned}$$

定理 2.6 (機率的加法律, Additive Law of Probability). 二事件 A 與 B 的聯集的機率

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<證> 由 Venn-diagram, 可得

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \text{ (二互斥事件)}$$

以及

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \text{ (二互斥事件)}$$

接著由機率的定義, 因爲互斥, 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \tag{1}$$

以及

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \tag{2}$$

由 (2) 式解 $P(\overline{A} \cap B)$ 並代入 (1) 式, 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

註. 加法律的推廣: 三事件 A, B, C 的聯集的機率, 由 Venn-diagram, 可得

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = \\ & P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ & \quad P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

定理 2.7. 對任一事件 A,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

<證> 因爲 $S = A \cup \overline{A}$ 且 A 與 $\overline{A}$ 互斥, 得

$$1 = P(S) = P(A) + P(\overline{A})$$

所以,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$