單元 15: 單一服務者佇列系統
(課本 §6.2)

設一系統中只有一位服務者. 顧客到達系統時, 若服務者有空, 則進行服務; 否則, 以先到先服務的原則 (First Come First Serve, FCFS), 等候服務. 另假設

(i) 服務時間 (service time)

$$S \sim G(x)$$

(ii) 第一個顧客的到達時間

$$W_0 \sim F_0(x)$$

以及若在時間 s 有一顧客到達 (進入系統), 則等到下一個顧客進入系統, 所需經過的時間

$$W_s \sim F_s(x)$$

並稱 W_0, W_s 爲等候時間 (waiting times, 或間隔時間, interarrival times), 如圖示. 例如, 若

$$\text{顧客的到達} \sim NPP(\lambda(t))$$

且

$$\lambda(t) \leq \lambda$$

則可模擬等候時間 W_s 如下述的

演算法:

(1) 令 $W = 0$ 且 X 爲前一個事件發生時間.

(2) 生成一仿隨機數 U_1.

(3) 令

$$W = W - \frac{1}{\lambda}\log U_1$$

且

$$X = X + W$$

(4) 生成另一仿隨機數 U_2.

(5) 若

$$U_2 \le \frac{\lambda(X)}{\lambda}$$

則令

$$W_s = W$$

且結束.

(6) 回到 (2).

(iii) 在某一固定的時間 T 以後, 就不再接受顧客, 且已接受的顧客均需完成服務.

問. (a) 平均每一顧客停留在系統的時間爲何? (b) 服務完最後一個顧客時, 超過 T 的平均時間爲何?

<解> 令事件爲

$$t_a = \text{顧客的到達時間}$$

以及

$$t_d = \text{顧客的離去時間}$$

則在明確地定出事件後, (a) 乃相當於求

$$\text{停留時間} \overset{\text{def}}{=} t_d - t_a$$

的期望值, 其中更明確的說, 對於任意的第 i 個顧客,

$$t_a = \text{第 } i \text{ 個顧客的到達時間}$$

且

$$t_d = \text{第 } i \text{ 個顧客的離去時間}$$

因此, 在所有顧客的狀態爲獨立且同分布的情況下, 可用模擬法估計每一顧客的平均停留時間.

(b) 乃相當於求超過時間

$$T_p \overset{\text{def}}{=} \max\{0,\ t_d - T\}$$

的期望值, 其中更明確地說,

$$t_d = \underline{\text{最後一個}}\text{顧客的離去時間}$$

因此, 在每一天的狀態均爲獨立且相同分布的情況下, 可用模擬法估計出平均超過時間.

關鍵: 在已知每個顧客 (所接受) 的服務時間以及等候時間 (事件間隔時間) 下, 求每個顧客的 t_a 與 t_d.

觀察: 爲明確起見, 令

$$t_a(i) = \text{第 } i \text{ 個顧客的到達時間}$$

且

$$t_d(i) = \text{第 } i \text{ 個顧客的離去時間}$$

則 (i) 第 i 個顧客的到達時間

$$t_a(i) = t_a(i-1) + W_{t_a(i-1)} \tag{1}$$

如圖示.

(ii) 若

$$t_d(i-1) \le t_a(i)$$

則表示服務人員有空, 可馬上服務第 i 個顧客, 故第 i 個顧客的離去時間

$$t_d(i) = t_a(i) + S \tag{2}$$

否則, 要等到第 $(i-1)$ 個顧客離去時, 亦即, $t_d(i-1)$, 第 i 個顧客才能接受服務, 故第 i 個顧客的離去時間

$$t_d(i) = t_d(i-1) + S \tag{3}$$

如圖示.

合併 (2) 式與 (3), 得第 i 個顧客的離去時間

$$t_d(i) = \max\{t_a(i), t_d(i-1)\} + S$$

註. 由 (1) 式知, $t_a(i)$ 是一個 $t_a(i-1)$ 的函數. 另由 (3) 式知, $t_d(i)$ 是一個 $t_a(i)$ 與 $t_d(i-1)$ 的函數. 所以, 有了第 $(i-1)$ 個顧客的資訊後, 就可得到第 i 個顧客的資訊, 亦即, 形成一個迭代公式 (recursive formula). 故, 程式是可行的.

綜合上述, 得如下的

演算法:

(1) 令 $t_a = 0$ 且 $t_d = 0$.

(2) 生成一個等候時間 W_{t_a}, 如前述 NPP($\lambda(t)$) 的等候時間.

(3) 令

$$t_a = t_a + W_{t_a}$$

(4) 若

$$t_a > T$$

則跳到 (9).

(5) 生成一個服務時間 S.

(6) 令

$$t_d = \max\{t_a, t_d\} + S$$

(7) 令停留時間

$$t_e = t_d - t_a$$

(8) 回到 (2).

(9) 令超過 T 的時間

$$T_p = \max\{0,\ t_d - T\}$$

且結束.

註. 每執行一回, 可得數個 t_e 與一個 T_p. 執行夠多的回數後, 由所得的 t_e 與 T_p 分別求平均值, 即得一個顧客的平均停留時間以及超過 T 的平均時間.

練習題. 列出一些顧客的等候時間以及服務時間, 並以手算法驗證此演算法無誤後, 在

$$W_t \sim \text{exp}(12)$$

且

$$S \sim \text{gamma}(2, 40)$$

以及

$$T = 10$$

之下, 寫一程式模擬 t_e 與 T_p.