單元 37: 分部積分與現值
(課本 §6.1)

一. 第二個技巧: 分部積分 (integration by parts)

適用於被積函數含有代數函數與指數函數的乘積或代數函數與對數函數的乘積時, 如

$$\int \underbrace{(x^2+1)}_{\text{代數函數}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{指數函數}} \, dx$$

或

$$\int \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{代數函數}} \cdot \underbrace{\ln x}_{\text{對數函數}} \, dx$$

分部積分的原理乃根據微分的乘法規則, 如下述. 令 u 與 v 爲 x 的可微函數. 首先根據乘法規則,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

接著, 將上式兩邊對 x 積分, 並根據積分的加減規則, 得

$$\begin{aligned} uv &= \int \frac{d}{dx}(uv)dx \\ &= \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx \\ &= \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx \end{aligned}$$

最後, 以微分式型式 (differential form), 亦即,

$$dv = \frac{dv}{dx}dx; \ du = \frac{du}{dx}dx$$

表示, 得

$$uv = \int udv + \int vdu$$

因此, 由上式得

$$\int udv = uv - \int vdu$$

此乃分部積分的公式.

重點. 將原積分先積出一部分, 得 v, 並將其餘的部分轉換成另一個較易積分的式子, 亦即 $\int vdu$.

執行的步驟爲

(1) 將原被積函數分成 u 與 dv 的乘積, 其中取 u 爲微分後可得更簡單形式的部分 (或易微分的部分), 取 dv 爲符合適當公式且易積分的部分.

(2) 求 du 與 v.

(3) 將 (1) 與 (2) 中的式子代入公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

後, 繼續求 $\int v du$.

例 1. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int x e^x dx$

(b) $\int x^3 \ln x dx$

(c) $\int \ln x dx$

(d) $\int (x^2+1) e^x dx$

<解> (a) 若原被積函數內沒有 x, 則為一指數函數的積分, 有積分公式可用, 易積分, 亦即, x 造成積分的困難. 一個處理的方式為, 令 u 為造成積分困難的部分 x, 且經

由微分將 x 移去，並令其餘的部分爲 dv，而這也是容易積分的．這樣的選取，以目前來看似乎是正確的．故，根據分部積分的步驟以及上述的構思，可取

$$u = x,\ dv = e^x dx$$

則

$$du = dx$$

以及

$$v = \int dv = \int e^x dx = e^x$$

因此，根據分部積分的步驟 (3) 代入後，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

(b) 明顯地，造成積分困難的部分爲 $\ln x$，而此部分容易微分，另剩餘的部分也容易積分，故一個合理的嘗試爲選取

$$u = \ln x;\ dv = x^3 dx$$

則

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

且

$$v = \int dv = \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4$$

因此，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int u dv \\
&= uv - \int v du \\
&= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{1}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\
&= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C
\end{aligned}$$

(c) 直接積分是不可能的，因爲至目前爲止並未提到對數函數的積分公式．另外也無法以代入法積分，因爲缺少所需的 $\frac{1}{x}$．故需考慮第二個積分技巧：分部積分，並在重新改寫原式下，可清楚地選出適當的 u 與 dv，再根據分部積分的公式求出積分，亦即，在

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$$

的辨識下，同 (b)，令

$$u = \ln x;\ \ dv = 1dx = dx$$

則可得

$$du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$$

且

$$v = \int dv = \int dx = x$$

因此，

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int u dv \\
&= uv - \int v du \\
&= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= x\ln x - \int dx \\
&= x\ln x - x + C
\end{aligned}$$

(d) 同 (a)，造成積分困難的部分為 x^2+1，而此部分容易微分，且剩餘的部分亦容易積分，故根據分部積分的步驟，一個合理的嘗試為選取

$$u = x^2+1;\ \ dv = e^x dx$$

則

$$du = (x^2+1)'dx = 2xdx$$

且

$$v = \int dv = \int e^x dx = e^x$$

因此，根據分部積分的公式，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= (x^2+1)e^x - \int e^x (2x) dx \qquad (1) \end{aligned}$$

而 (1) 式中的積分與 (a) 有相同的困難，並不像前述的各小題，可直接根據積分公式求積分，故根據處理 (a) 的經驗，需再做一次分部積分，處理此式中的積分，亦即，令

$$u = 2x;\ dv = e^x dx$$

則

$$du = 2dx$$

且

$$v = e^x$$

並由 (1) 式, 得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (x^2+1)e^x - \int u\,dv \\
&= (x^2+1)e^x - \left(uv - \int v\,du\right) \\
&= (x^2+1)e^x - \left(2xe^x - \int e^x \cdot 2dx\right) \\
&= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx \\
&= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\
&= (x^2-2x+3)e^x + C
\end{aligned}
$$

技巧摘要: 根據前述的經驗, 原則上

(1) 處理

$$\int x^n e^x dx \text{ 或 } \int (\text{多項式}) e^x dx$$

時, 取

$$u = x^n \text{ 或多項式; } dv = e^x dx$$

(2) 處理

$$\int x^n \ln x dx \text{ 或 } \int (\text{多項式}) \ln x dx$$

時, 取

$$u = \ln x;\ \ dv = x^n dx \text{ 或 } (\text{多項式})dx$$

例 2. 如下述各積分的求解,

(a) $\int x \ln x dx$

(b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

只因組成被積函數的因式的位子的不同, 而需用不同的公式與技巧, 故積分是一種辨識問題, 需要有能力辨識出何種技巧或公式可快速且正確地求解.

<解> (a) 因爲被積函數爲一多項式與對數函數的乘積, 故根據前述的經驗或技巧摘要需採用分部積分. 首先, 令

$$u = \ln x;\ \ dv = x dx$$

則

$$du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$$

且

$$v = \int dv = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

因此，根據分部積分的公式並將上式代入，得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int udv \\
&= uv - \int vdu \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int xdx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C
\end{aligned}$$

(b) 因爲被積函數中含有 $\ln x$ 與 $\frac{1}{x}$，故根據過去的經驗，可嘗試使用代入法，亦即，令

$$u = \ln x$$

則

$$du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$$

故, 將上式代入並根據積分的冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int u du \\ &= \frac{1}{2}u^2 + C \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \end{aligned}$$

(c) 稍微深入地辨識, 可看出被積函數中亦含有 $\ln x$ 與 $\frac{1}{x}$, 故同 (b), 一個直接的嘗試爲代入法. 首先, 令

$$u = \ln x$$

則

$$du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

因此, 將上式代入並根據對數規則, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |\ln x| + C \end{aligned}$$

二. 未來給付的現值 (present value)

欲得未來的值, 而現在必須儲存的金額稱爲現值.

問. 如何求現值?

答. 僅在通貨膨脹的考量下, 若 $c(t)$ 爲每年的連續收入函數 (continuous income function per year), 且 r 爲年通貨膨脹率 (annual inflation rate), 則在 t_1 年內的

$$\text{實際總收入} = \int_0^{t_1} c(t)dt$$

且

$$\text{現值} = \int_0^{t_1} c(t)e^{-rt}dt$$

例 3. 設某人中彩R $1,000,000, 且給付方式爲每年 $50,000, 共 20 年. 若年通貨膨脹率爲 6%, 試問此中獎金額的現值爲何?

<解> 根據題意, 年給付額

$$c(t) = 50,000$$

且年通貨膨脹率

$$r = 0.06$$

並經過 20 年, 故

$$\begin{aligned}\text{實際收入} &= \int_0^{20} c(t)dt \\ &= \int_0^{20} 50,000dt \\ &= 50,000t\Big|_0^{20} = \$1,000,000\end{aligned}$$

就是中獎金額一百萬.

然而,

$$\begin{aligned}\text{現值} &= \int_0^{20} c(t)e^{-rt}dt \\ &= \int_0^{20} 50,000e^{-0.06t}dt \\ &= \frac{50,000}{-0.06}e^{-0.06t}\Big|_0^{20} \\ &= \frac{50,000}{0.06}\left(1-e^{-1.2}\right) \\ &\approx \$582,338\end{aligned}$$

僅約爲中獎金額的五成八.