單元 51: 三角函數的導函數
(課本 §8.4)

一. 二個極限公式

下述爲推導三角函數的導函數所需的公式,

(i) 當 x 趨近於 0 時, 同時會趨近於 0 的 $\sin x$ 與 x 愈近似, 亦即,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

證明, 暫略, 以後再證; 但可用計算器驗證, 如課本; 亦可由圖示知, 當 $x \to 0$ 時, $x \approx \sin x$, 因而相比的極限趨近於 1, 亦即,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

如所求.

(ii) 當 x 趨近於 0 時, 趨近於 0 的 $1 - \cos x$ 會遠小於亦趨近 0 的 x, 亦即,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

<證> 首先，分子分母同乘以 $(1+\cos x)$，並根據平方差以及三角恆等式化簡，得

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}\\ &= \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\end{aligned}$$

接著，因爲 $\sin x$ 與 $\cos x$ 均是連續函數，並根據求極限的法則以及 (i) 中的公式，由上式得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}\\ &= 1\cdot\frac{\sin 0}{1+\cos 0}\\ &= 1\cdot\frac{0}{1+1}=1\cdot 0=0\end{aligned}$$

如所求.

二. 三角函數的導函數

根據上述的公式，得下述六個三角函數的導函數，

(1) $\dfrac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$

(2) $\dfrac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$

(3) $\dfrac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$

(4) $\dfrac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$

(5) $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$

(6) $\dfrac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$

<證> (1) 首先，根據導函數的定義，

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

接著，根據三角函數的和角公式

$$\sin(\theta \pm \phi) = \sin\theta\cos\phi \pm \cos\theta\sin\phi$$

以及化簡整理，由上式得

$$\begin{aligned}
\text{右邊分式} &= \frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \cos x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} - \sin x\cdot\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}$$

最後，令 $\Delta x \to 0$，取極限，並根據求極限的法則，以及公式 (i) 與公式 (ii)，由上式得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sin x] &= \cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \\
&\qquad - \sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x} \\
&= \cos x\cdot 1 - \sin x\cdot 0 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

得證.

(2) 首先，根據導函數的定義，

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

接著，根據三角函數的和角公式

$$\cos(\theta\pm\phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \sin\theta\sin\phi$$

以及化簡整理，由上式得

$$\begin{aligned}
\text{右邊分式} &= \frac{\cos x\cos\Delta x - \sin x\sin\Delta x - \cos x}{\Delta x} \\
&= -\sin x\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} - \cos x\cdot\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}$$

最後，令 $\Delta x \to 0$，取極限，並根據求極限的法則，以及公式 (i) 與公式 (ii)，由上式得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\cos x] &= -\sin x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\
&\qquad - \cos x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \\
&= -\sin x \cdot 1 - \cos x \cdot 0 \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

得證.

(3) 根據 $\tan x$ 的定義，微分的除法規則，以及上述求得的 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的導函數，並以三角恆等式化簡，且由 $\sec x$ 的定義，得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] \\
&= \frac{\frac{d}{dx}[\sin x](\cos x) - (\sin x)\frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x} \\
&= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

如所求.

(4) 根據 $\cot x$ 的定義，微分的除法規則，以及上述求得的 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的導函數，並以三角恆等式化簡，且由 $\csc x$ 的定義，得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\cot x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right] \\
&= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} \\
&= \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x
\end{aligned}$$

如所求.

(5) 根據 $\sec x$ 的定義，微分的廣義冪次規則，以及上述求得的 $\cos x$ 的導函數，並整理化簡，得

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sec x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cos x}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[(\cos x)^{-1}\right] \\
&= -(\cos x)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}[\cos x] \\
&= -(\cos x)^{-2}\cdot(-\sin x) \\
&= \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\tan x
\end{aligned}$$

得證.

(6) 根據 $\csc x$ 的定義, 微分的廣義冪次規則, 以及上述求得的 $\sin x$ 的導函數, 並整理化簡, 得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\csc x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sin x}\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[(\sin x)^{-1}\right] \\ &= -(\sin x)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}[\sin x] \\ &= -(\sin x)^{-2}\cdot(\cos x) \\ &= -\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x\cot x\end{aligned}$$

得證.

三. 三角合成函數的導函數

令 u 爲 x 的可微函數, 則根據上述公式以及連鎖規則, 六個三角合成函數的導函數如下,

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u\cdot\frac{du}{dx}$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u\cdot\frac{du}{dx}$

(3) $\dfrac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$

(4) $\dfrac{d}{dx}[\cot u] = -\csc^2 u \cdot \dfrac{du}{dx}$

(5) $\dfrac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \tan u \cdot \dfrac{du}{dx}$

(6) $\dfrac{d}{dx}[\csc u] = -\csc u \cot u \cdot \dfrac{du}{dx}$

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = \sin(x^2 - 1)$

(b) $y = \tan(e^x)$

(c) $f(x) = \tan^4(3x)$

(d) $y = \csc\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(e) $g(t) = \sqrt{\sin 5t}$

(f) $h(x) = \dfrac{\cos x}{x}$

(g) $y = \ln|\sec x + \tan x|$

<解> (a) 根據 sin 合成函數的微分公式, 也就是說, 由連鎖規則, 先對 sin 函數微分得 cos 函數, 並代入內部函數 $x^2 - 1$ 後, 再乘上 $x^2 - 1$ 的導函數, 可得

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x^2-1)\frac{d}{dx}[x^2-1] \\ &= 2x\cos(x^2-1) \end{aligned}$$

(b) 根據 tan 合成函數的微分公式, 先對 tan 函數微分得 $\sec^2$ 函數, 並代入內部函數 e^x 後, 再乘上 e^x 的導函數, 可得

$$\begin{aligned} y' &= \sec^2(e^x)\frac{d}{dx}[e^x] \\ &= e^x\sec^2(e^x) \end{aligned}$$

(c) 根據慣用法,

$$f(x) = \tan^4(3x) = [\tan(3x)]^4$$

乃一 tan 合成函數的 4 次方.

故由廣義冪次規則，以及 tan 合成函數的微分公式，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,[\tan(3x)]^3 \cdot \frac{d}{dx}[\tan(3x)] \\ &= 4\tan^3(3x)\cdot\sec^2(3x)\frac{d}{dx}[3x] \\ &= 12\tan^3(3x)\sec^2(3x) \end{aligned}$$

(d) 根據 csc 合成函數的微分公式，先對 csc 函數微分得 $-\csc\cot$ 函數，並代入內部函數 $\frac{x}{3}$ 後，再乘上 $\frac{x}{3}$ 的導函數，可得

$$\begin{aligned} y' &= -\csc\left(\frac{x}{3}\right)\cot\left(\frac{x}{3}\right)\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{3}\right] \\ &= -\frac{1}{3}\csc\left(\frac{x}{3}\right)\cot\left(\frac{x}{3}\right) \end{aligned}$$

(e) 原函數是一 sin 合成函數的 $\frac{1}{2}$ 次方，故根據廣義冪次規則，以及 sin 合成函數的微分公式，並將冪次爲負的移至分母的化簡整理，得

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2}(\sin 5t)^{-1/2}\cdot\frac{d}{dt}[\sin 5t] \\ &= \frac{1}{2}(\sin 5t)^{-1/2}\cdot\cos(5t)\frac{d}{dt}[5t] \\ &= \frac{5\cos 5t}{2\sqrt{\sin 5t}} \end{aligned}$$

(f) 根據微分的除法規則以及 cos 函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{x\frac{d}{dx}[\cos x] - \cos x\frac{d}{dx}[x]}{x^2} \\ &= \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

(g) 這是一個對數合成函數, 故根據連鎖規則, 對數函數, sec 函數, 以及 tan 函數的微分公式, 並化簡整理, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}[\sec x + \tan x] \\ &= \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sec x \tan x + \sec^2 x) \\ &= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \\ &= \sec x \end{aligned}$$

例 2. 試求

$$f(x) = 2\sin x - \cos 2x$$

在 $(0, 2\pi]$ 上的相對極值.

<解> (1) 找臨界數, 亦即, 相對極值候選數. 首先, 根據 sin 與 cos 函數的微分公式, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x - (-\sin 2x \cdot 2) \\ &= 2\cos x + 2\sin 2x \end{aligned}$$

在實數線上恆定義.

故僅有第一類臨界數，亦即，$f'(x)=0$ 的 x 值，此乃相當於解

$$\cos x+\sin 2x=0$$

經由倍角公式，亦相當於解

$$\cos x+2\sin x\cos x=\cos x(1+2\sin x)=0$$

因此，

$$\cos x=0$$

並由此得出在 $(0,2\pi]$ 內的臨界數

$$x=\frac{\pi}{2},\ \ \frac{3\pi}{2}$$

或

$$1+2\sin x=0$$

亦相當於

$$\sin x=-\frac{1}{2}$$

以及在 $(0,2\pi]$ 內對應的臨界數

$$x=\frac{7\pi}{6},\ \ \frac{11\pi}{6}$$

(2) 驗證. 上述求得的四個臨界數將 $(0, 2\pi)$ 分割成五個子區間, 且在每個子區間內一階導函數

$$f'(x) = 2\cos x(1 + 2\sin x)$$

的符號如下述及圖示.

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$: $f' = (-)(+) = (-)$, 遞減.

$\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$\left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

因此, 根據一階導函數檢定法,

$$f(x) = 2\sin x - \cos 2x$$

在 $x = \frac{\pi}{2}$ 與 $x = \frac{3\pi}{2}$ 有相對最大值

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi) \\ &= 2(1) - (-1) = 3 \end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos(3\pi) \\ &= -2-(-1) = -1 \end{aligned}$$

且在 $x = \frac{7\pi}{6}$ 與 $\frac{11\pi}{6}$ 有相對最小值

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

與

$$\begin{aligned} f\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= 2\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$