單元 27: 對數函數的微分
(課本 §5.5)

根據指對互逆性, 對於 $x > 0$,

$$e^{\ln x} = x$$

將上式兩邊對 x 微分並根據指數函數的連鎖規則, 得

$$e^{\ln x}\frac{d}{dx}\ln x = 1$$

即

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

因此, 得

對數函數的微分規則. 自然對數函數的導函數為

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x},\ x > 0$$

又根據連鎖規則, 可得連續函數與對數函數合成的微分規則, 即

對數函數的連鎖規則. 若 f 為一可微函數, 則

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)},\ f(x) > 0$$

<證> 設函數 $g(x) = \ln x$，則合成函數

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g[f(x)] = \ln f(x)$$

故由連鎖規則以及對數函數的微分規則，即

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\ln f(x)] &= h'(x) = g'[f(x)]f'(x) \\ &= \frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\end{aligned}$$

註 1. 對於 $x > 0$，根據對數函數的微分規則，得

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{1}$$

對於 $x < 0$，根據對數函數的連鎖規則，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln|x| &= \frac{d}{dx}\ln(-x) \\ &= \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}\end{aligned} \tag{2}$$

合併 (1) 與 (2) 式，得

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x},\ x \neq 0$$

例 1. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = x \ln x$

(b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(c) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

(d) $k(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(e) $y = \ln(\ln x)$

<解> (a) 根據乘法規則與對數函數的微分規則, 得

$$f'(x) = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln x$$

(b) 根據除法規則與對數函數的微分規則, 得

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

(c) 根據對數函數的連鎖規則, 得

$$h'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$$

(d) 根據連鎖規則與對數函數的微分規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{1}{2}(\ln x + x)^{-1/2}\left(\frac{1}{x}+1\right) \\ &= \frac{x+1}{2x\sqrt{\ln x + x}} \end{aligned}$$

(e) 根據對數函數的連鎖規則, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$$

微分對數函數的合成函數時, 若內函數爲乘積, 除式或次方時, 一個原則是, 先根據對數律改寫再逐項微分.

例 2. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = \ln[(x^2+1)(x^3+2)^6]$

(b) $g(t) = \ln(t^2 e^{-t^2})$

(c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3 e^{x^2+1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

<解> (a) 首先，根據對數律改寫，得

$$y = \ln(x^2+1) + 6\ln(x^3+2)$$

接著，根據對數函數的連鎖規則，得

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{6(x^3+2)'}{x^3+2} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} + \frac{18x^2}{x^3+2}\end{aligned}$$

(b) 先根據對數律改寫，得

$$g(t) = 2\ln t - t^2$$

再根據對數函數的微分規則並化簡，得

$$g'(t) = \frac{2}{t} - 2t = \frac{2(1-t^2)}{t}$$

(c) 根據對數律改寫，得

$$f(x) = 3\ln x + x^2 + 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

再由對數函數的微分規則並化簡, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{x} + 2x - \frac{2x}{2(x^2-1)} \\ &= \frac{3}{x} + 2x - \frac{x}{x^2-1} \\ &= \frac{3(x^2-1) + 2x^2(x^2-1) - x^2}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{2x^4-3}{x(x^2-1)} \end{aligned}$$

計算由乘, 除與次方形成的函數或函數的函數次方的導函數時, 一個簡便且可行的方法爲對數微分 (logarithmic differentiation), 對應的

對數微分步驟爲

1. 將等式兩邊同取 ln, 並根據對數律改寫成較簡單項的和差或乘積.

2. 兩邊對 x 微分.

3. 解 $\frac{dy}{dx}$.

例 3. 試以對數微分求下列各項函數的導函數.

(a) $y = x(x+1)^5(x^2+1)$

(b) $f(x) = \dfrac{(2x^3-1)^5}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

(c) $g(x) = x^x$

(d) $h(x) = x^{\ln x}$

<解> (a) 首先, 兩邊同取 ln 並根據對數律改寫, 得

$$\ln y = \ln x + 5\ln(x+1) + \ln(x^2+1)$$

接著, 兩邊對 x 微分並根據對數函數的連鎖規則, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{5}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}$$

最後, 解 $\frac{dy}{dx}$, 得

$$\begin{aligned} y' &= y\Big(\frac{1}{x} + \frac{5}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\Big) \\ &= x(x+1)^5(x^2+1)\Big(\frac{1}{x} + \frac{5}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1}\Big) \end{aligned}$$

(b) 兩邊同取 ln 並根據對數律改寫，得

$$\ln f(x) = 5\ln(2x^3-1) - \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$$

對 x 微分，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{30x^2}{2x^3-1} - \frac{2x}{3(x^2+1)}$$

因此，

$$f'(x) = \frac{(2x^3-1)^5}{\sqrt[3]{x^2+1}}\left[\frac{30x^2}{2x^3-1} - \frac{2x}{3(x^2+1)}\right]$$

(c) 函數 g 既不是冪次函數也不是指數函數，乃一函數的函數次方，故不能使用冪次規則，即

$$g'(x) \neq x \cdot x^{x-1} = x^x$$

也不能使用指數函數的微分規則，即

$$g'(x) \neq (\ln x)x^x(1) = (\ln x)x^x$$

一個可行的方法爲對數微分，即先兩邊取 ln 並根據對數律化簡，得

$$\ln g(x) = x\ln x$$

再對 x 微分並根據連鎖規則與乘法規則，得

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \ln x$$

因此,

$$g'(x) = x^x(1 + \ln x)$$

(d) 函數 h 爲一函數的函數次方, 故根據對數微分, 兩邊取 ln 並化簡, 得

$$\ln h(x) = (\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2$$

接著, 兩邊對 x 微分並根據連鎖規則, 得

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = 2(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2\ln x}{x}$$

因此,

$$h'(x) = x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right) = (2\ln x)(x^{\ln x - 1})$$

根據指對互逆性,

$$b^{\log_b x} = x$$

將上式兩邊對 x 微分, 並根據一般指數函數的連鎖規則, 得

$$(\ln b)b^{\log_b x} \cdot \frac{d}{dx}\log_b x = 1$$

即

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{b^{\log_b x}} = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}$$

因此, 得

一般對數函數的微分規則. 一般對數函數的導函數爲

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}, \quad b > 0, b \neq 1$$

註. 另一求得上述規則的過程爲, 令

$$y = \log_b x$$

則由對數函數的定義,

$$b^y = x$$

兩邊取 ln 並化簡, 得

$$y \ln b = \ln x, \text{ 即 } y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

由此, 得換底公式

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

接著, 由換底公式及對數函數的微分規則, 得

$$\frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{\ln b}(\ln x)' = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}$$

同理, 根據連鎖規則, 得

一般對數函數的連鎖規則. 設 f 爲一可微函數, 則

$$\frac{d}{dx}\log_b f(x) = \frac{1}{\ln b}\frac{f'(x)}{f(x)}$$

<證> 設 $g(x) = \log_b x$, 則

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g[f(x)] = \log_b f(x)$$

故根據連鎖規則及一般對數函數的導函數規則, 即

$$g'(x) = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}$$

得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_b f(x) &= h'(x) = g'[f(x)]f'(x) \\ &= \frac{1}{\ln b}\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{\ln b}\frac{f'(x)}{f(x)}\end{aligned}$$

例 4. 試求下列各項函數的導函數.

(a) $f(x) = x^3 \log_{10} x$

(b) $g(x) = 5^{x^2} + \log_3(x^2+1)$

<解> (a) 由乘法規則與一般對數函數的微分規則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \log_{10} x + x^3 \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \log_{10} x + \frac{x^2}{\ln 10} \end{aligned}$$

(b) 根據一般指數與對數函數的連鎖規則,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\ln 5) 5^{x^2} (2x) + \frac{1}{\ln 3} \frac{2x}{x^2+1} \\ &= (2 \ln 5)(x) 5^{x^2} + \left(\frac{2}{\ln 3}\right) \left(\frac{x}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$