單元 50: 變數分離
(課本 §9.2)

微分方程式乃根據基本型式分類並按不同類型發展出不同的解法.

微分方程式的階數 (order) 乃方程式中未知函數的最高導函數次數 (order of highest derivative), 如

$$y' = xe^x$$

與

$$y' + 2y = x^2$$

均爲一階微分方程式 (1st-order differential equation); 而

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + ty - 8 = 0$$

爲二階微分方程式 (2nd-order differential equation).

本章僅探討一階微分方程式的求解.

型如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

的一階微分方程式, 其中 $f(x)$ 僅爲 x 的函數, $g(y)$ 僅爲 y 的函數, 稱作一階可分離微分方程式 (1st-order separable differential equation), 如

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(C-Q)$$

爲可分離的 (取 $f(t) = k$, $g(Q) = Q(C-Q)$), 但

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + 2$$

不是可分離的 (無法表成 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$).

變數分離法 (method of separation of variables)

給定一階可分離微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

步驟 1. 分離變數, 即將原式改寫成

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

將含 y 的式子置於左邊, 含 x 的式子置於右邊.

步驟 2. 兩邊積分, 並解 y (若可行).

爲何成立? 若 $g(y) \neq 0$, 則原式等價於

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} - f(x) = 0 \tag{1}$$

設 $G(y)$ 爲 $\frac{1}{g(y)}$ 的反導函數且 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 的反導函數, 則根據連鎖規則與 (1) 式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[G(y) - F(x)] &= G'(y)\frac{dy}{dx} - F'(x) \\ &= \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} - f(x) = 0 \end{aligned}$$

因此,

$$G(y) - F(x) = C$$

即

$$G(y) = F(x) + C$$

或

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

得步驟 2.

例 1. 試求微分方程式

$$y' = \frac{xy}{x^2+1}$$

的一般解.

<解> 原式等價於

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2+1}\cdot y$$

可分離的. 故分離變數, 得

$$\frac{1}{y}dy=\frac{x}{x^2+1}dx$$

兩邊積分, 得

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

即右邊積分取 $u=x^2+1$, $du=2xdx$ 的代入法, 得

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

取 e 並根據指數律, 對數律化簡整理且爲方便計, 將常數 e^C 表成 C, 得

$$\begin{aligned}|y| &= e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C}\\ &= e^C\sqrt{x^2+1}=C\sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

去絕對值並爲方便計, 將 $\pm C$ 表成 C, 得一般解

$$y=\pm C\sqrt{x^2+1}=C\sqrt{x^2+1}$$

乃一外顯式 (explicit form), 即將 y 明確地表成 x 的數學式.

例 2. 試求滿足微分方程式

$$ye^x + (y^2 - 1)y' = 0$$

以及初始條件 $y(0) = 1$ 的特殊解.

<解> 原式等價於

$$(y^2 - 1)\frac{dy}{dx} = -ye^x$$

分離變數, 得

$$\frac{y^2 - 1}{y}dy = -e^x dx$$

兩邊積分, 得

$$\int \frac{y^2 - 1}{y}dy = -\int e^x dx$$

即

$$\int \left(y - \frac{1}{y}\right) dy = -\int e^x dx$$

故

$$\frac{1}{2}y^2 - \ln|y| = -e^x + C$$

即, 以 C 取代 $2C$, 得

$$y^2 - 2\ln|y| = -2e^x + C$$

代 $y(0) = 1$, 得

$$1 - 2\ln 1 = -2e^0 + C$$

即

$$1 = -2 + C$$

故 $C = 3$ 且特殊解爲

$$y^2 - 2\ln|y| = -2e^x + 3$$

也就是說, 可用含 x 與 y 的內隱方程式 (implicit equation) 表示解, 當不易解 y 時.

例 3. 設曲線 $y = f(x)$ 的圖形在點 $P(x, y)$ 的切線斜率爲 $-\frac{x}{2y}$ 且過點 $P(1, 2)$. 試求 f.

<解> 根據題意及導函數的切線斜率意義, 列式, 得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

且邊界條件 $y(1) = 2$, 即 $x = 1$, $y = 2$. 分離變數, 得

$$2y\,dy = -x\,dx$$

兩邊積分, 得

$$\int 2ydy = \int -xdx$$

即

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

代 $y(1) = 2$, 得

$$4 = -\frac{1}{2}(1)^2 + C$$

即

$$C = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

且

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$$

或

$$x^2 + 2y^2 = 9$$

乃一橢圓, 如圖示.

Self-Check Exercise

試求滿足

$$y' = 2x^2y + 2x^2$$

與 $y(0) = 0$ 的特殊解.

<解> 改寫, 得

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2(y+1)$$

可分離的. 分離變數,

$$\frac{1}{y+1}dy = 2x^2dx$$

兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y+1}dy = \int 2x^2dx$$

即

$$\ln|y+1| = \frac{2}{3}x^3 + C$$

取 e 並根據指數律化簡以及常數約定, 得

$$|y+1| = e^{\frac{2}{3}x^3+C} = e^C e^{\frac{2}{3}x^3} = Ce^{\frac{2}{3}x^3}$$

去絕對值並根據常數約定, 得

$$y+1 = \pm Ce^{\frac{2}{3}x^3} = Ce^{\frac{2}{3}x^3}$$

最後, 由上式, 代 $y(0) = 0$, 得

$$1 = Ce^0 = C$$

以及特殊解

$$y = -1 + e^{\frac{2}{3}x^3}$$

Exercises

12. 試求

$$y' = \frac{xe^x}{2y}$$

的一般解.

<解> 改寫, 得

$$\frac{dy}{dx} = xe^x \frac{1}{2y}$$

可分離的. 故分離變數, 得

$$2y dy = xe^x dx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int 2y dy = \int xe^x dx$$

即右邊根據分部積分取

$$u = x, \ dv = e^x dx$$

得

$$du = dx,\ v = e^x$$

以及內隱式一般解

$$\begin{aligned} y^2 &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C \end{aligned}$$

14. (第八版) 試求

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

的一般解.

<解> 分離變數, 得

$$\frac{1}{y^3}dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y^3}dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

即右邊根據取

$$u = 1 + x^2,\ du = 2xdx$$

的代入法並調整係數, 得內隱式一般解

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2}(2)\sqrt{1+x^2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

或根據常數約定, 化簡整理,

$$y^2 = -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2} + C}$$

15. 試求

$$y' = \frac{y \ln x}{x}$$

的一般解.

<解> 分離變數, 得

$$\frac{1}{y}dy = \frac{\ln x}{x}dx$$

兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{\ln x}{x}dx$$

即右邊根據代入法取

$$u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx$$

得

$$\ln|y| = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

取 e 並根據指數律化簡以及常數約定，得

$$|y| = e^{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C} = e^C e^{\frac{1}{2}(\ln x)^2} = Ce^{\frac{1}{2}(\ln x)^2}$$

最後，去絕對值且根據常數約定，得一般解

$$y = \pm Ce^{\frac{1}{2}(\ln x)^2} = Ce^{\frac{1}{2}(\ln x)^2}$$

21．試求滿足

$$y' = 3xy - 2x$$

及 $y(0) = 1$ 的特殊解.

<解> 改寫，得

$$\frac{dy}{dx} = x(3y - 2)$$

可分離的．故分離變數，得

$$\frac{1}{3y-2}dy = xdx$$

兩邊積分，得

$$\int \frac{1}{3y-2}dy = \int xdx$$

即左邊根據線性轉換，得

$$\frac{1}{3}\ln|3y-2| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

接著，同乘 3並根據常數約定，得

$$\ln|3y-2| = \frac{3}{2}x^2 + C$$

取 e 並根據指數律化簡以及常數約定，得

$$|3y-2| = e^{\frac{3}{2}x^2+C} = e^C e^{\frac{3}{2}x^2} = Ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

去絕對值且根據常數約定，

$$3y-2 = \pm Ce^{\frac{3}{2}x^2} = Ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

最後，由上式，代 $y(0)=1$，得

$$3(1)-2 = Ce^0 = C$$

即 $C=1$，以及特殊解

$$3y-2 = e^{\frac{3}{2}x^2}$$

或

$$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}$$

22. 試求滿足

$$y' = xe^{x^2}y$$

及 $y(0) = 1$ 的特殊解.

<解> 分離變數, 得

$$\frac{1}{y}dy = xe^{x^2}dx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{y}dy = \int xe^{x^2}dx$$

即右邊根據代入法取

$$u = x^2,\ du = 2xdx$$

並調整係數, 得

$$\ln|y| = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

取 e 並根據常數約定以指數律化簡且去絕對值, 得

$$y = Ce^{\frac{1}{2}e^{x^2}}$$

最後, 由上式, 代 $y(0) = 1$, 得

$$1 = Ce^{\frac{1}{2}e^0} = Ce^{\frac{1}{2}}$$

即 $C = e^{-\frac{1}{2}}$ 以及特殊解

$$y = e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}e^{x^2}} = e^{\frac{1}{2}(e^{x^2}-1)}$$

41. T

42. F

43. T

44. T

45. F

46. F