單元 40: 積分表與配方法
(課本 §6.4)

根據被積函數的型式, 積分表分成下述的八類,

(1) 含 u^n, 公式 1-2.

(2) 含 $a+bu$, 公式 3-13.

(3) 含 $\sqrt{a+bu}$, 公式 14-20.

(4) 含 $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a>0$, 公式 21-28.

(5) 含 u^2-a^2, $a>0$, 公式 29-30.

(6) 含 $\sqrt{a^2-u^2}$, $a>0$, 公式 31-33.

(7) 含 e^u, 公式 34-38.

(8) 含 $\ln u$, 公式 39-43.

使用積分表的方法爲

(1) 直接使用合適的公式, 如例 1.

(2) 以代入法轉換成合適的公式, 如例 2 與例 3.

例 1. 試求

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

<解> 因爲被積函數中含有 $\sqrt{x-1}$, 此乃一次式的方根類, 故根據積分表可搜尋 $\sqrt{a+bu}$ 的類型, 得公式 19:

$$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = -\frac{2(2a-bu)}{3b^2}\sqrt{a+bu} + C$$

與原式的被積函數有完全相同的型式, 亦即分子爲積分變數, 且分母爲積分變數的一次式的方根. 故經由適當的選取常數, 則可直接使用此公式, 亦即, 令

$$a = -1, \; b = 1, \; u = x$$

由公式 19, 得

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = -\frac{2[2(-1)-(1)x]}{3(1)^2}\sqrt{-1+x}+C$$
$$= \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}+C$$

例 2. 試求

$$\int x\sqrt{x^4-9}dx$$

<解> 被積函數內含有一四次式的方根, 雖然積分表沒有此種四次式的方根的公式, 但 $\sqrt{x^4-9}$ 與 $\sqrt{u^2-a^2}$ 類似, 故可先嘗試以

$$u = x^2,\ du = 2xdx$$

的代入法作型式的轉換, 得

$$原式 = \frac{1}{2}\int \sqrt{u^2-9}du \tag{1}$$

爲一二次式的方根類, 故根據積分表搜尋 $\sqrt{u^2-a^2}$ 的類型, 得公式 21:

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du$$
$$= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right|\right)+C$$

在取 ”−” 號下, 與 (1) 式的被積函數有完全相同的型式.

因此, 令 $a = 3$ 並取 ”−” 號下, 由 (1) 式與公式 21, 得

原式

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(u\sqrt{u^2 - 9} - 9 \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 9} \right| \right) + C \\
&= \frac{1}{4} \left(x^2\sqrt{x^4 - 9} - 9 \ln \left| x^2 + \sqrt{x^4 - 9} \right| \right) + C
\end{aligned}
$$

其中第二個等號乃是將 $u = x^2$ 反代入, 以原式的積分變數 x 表示所致.

例 3. 試求

$$\int_0^2 \frac{x}{1 + e^{-x^2}} dx$$

<解> 這是一個定積分, 故根據微積分基本定理, 需先求出不定積分, 再計算出此定積分的值. 首先, 這是一個含有指數函數的被積函數, 但積分表中此類公式的指數函數的指數部份僅爲積分變數, 而不像此例中的積分變數的函數 $-x^2$, 故需經由選取

$$u = -x^2; \; du = -2xdx$$

的代入法作型式的轉換，得

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^{-x^2}}(-2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^{u}}du \qquad (2)\end{aligned}$$

接著，經由查表，得公式 37:

$$\int \frac{1}{1+e^u}du = u - \ln(1+e^u) + C$$

與 (2) 式中的被積函數有完全相同的型式.

因此，根據 (2) 式與公式 37，並將 $u=-x^2$ 反代入且整理，得

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\left[u - \ln(1+e^u)\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 + \ln\left(1+e^{-x^2}\right)\right] + C\end{aligned}$$

最後，根據微積分基本定理，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}\left[x^2 + \ln\left(1+e^{-x^2}\right)\right]\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[4 + \ln\left(1+e^{-4}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[0 + \ln(1+1)\right] \\ &= 2 + \frac{1}{2}\ln(1+e^{-4}) - \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

(3) 以配方法 (completing the square) 轉換成合適的公式, 如例 4.

例 4 試求

$$\int \frac{1}{x^2-4x+1}dx$$

<解> 被積函數中含有一個二次式, 但卻有一次項, 不像積分表中二次式的類型 u^2-a^2, 不含一次項. 一個處理的方式是, 經由配方法將此一次項整理成一個一次式的平方, 再根據適當的代入法轉換成合適的公式.

首先, 將 x^2-4x+1 配方, 得

$$\begin{aligned} x^2-4x+1 &= x^2-4x+4-4+1 \\ &= (x-2)^2-3 \\ &= (x-2)^2-(\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

接著, 經由選取

$$u = x-2;\ du = dx$$

的代入法作型式的轉換, 得

$$\text{原式} = \int \frac{1}{u^2-(\sqrt{3})^2}du \tag{3}$$

最後, 搜尋積分表中含 $u^2 - a^2$ 的類型, 得公式 29:

$$\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

與 (3) 式中的被積函數有完全相同的型式.

因此, 令 $a = \sqrt{3}$, 並根據 (3) 式與公式 29, 以及反代入 $u = x - 2$, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - 2 - \sqrt{3}}{x - 2 + \sqrt{3}} \right| + C \end{aligned}$$

(4) 縮減公式 (reduction formulas)

$$\int f(x) dx = g(x) + \int h(x) dx$$

乃是將原式表成一個明確的函數 $g(x)$ 與另一個較易處理的不定積分 $\int h(x) dx$ 的和, 經由一次或多次的套用同一個縮減公式或其他適當的公式, 可得出原式的積分, 在型式與概念上與分部積分類似, 如例 5.

例 5. 試求

$$\int x^2 e^x dx$$

<解一> 分部積分, 因爲被積函數爲一多項式與指數函數的乘積. 請根據過去的經驗, 自行嘗試.

<解二> 根據積分表中含指數函數的類型, 得公式 36:

$$\int u^n e^u du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u du$$

與原式的被積函數有完全相同的型式. 故根據原式與公式 36, 取

$$n = 2;\ u = x$$

得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^2e^x - 2\int x^{2-1}e^x dx \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x dx \end{aligned} \tag{4}$$

其中等號右邊爲一在型式上比原式較易積分的式子.

接著, 可再度在取 $n = 1$ 下, 套用公式 36, 將 x 的次方再度縮減 1, 直至 0 次方, 而不含 x 項, 僅有指數函數, 並根據指數函數的積分公式求出積分, 請自行嘗試.

或根據積分表, 得公式 35:

$$\int ue^u du = (u-1)e^u + C$$

與 (4) 式等號右邊的被積函數有完全相同的型式.

因此，取 $u = x$，並由 (4) 式與公式 35，得

$$\begin{aligned} 原式 &= x^2 e^x - 2[(x-1)e^x] + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C \end{aligned}$$