單元 32: 指數與對數積分
(課本 §5.3)

令 u 爲 x 的可微函數.

(1) 簡單積分指數律:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

此乃因爲

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

故根據不定積分的定義得證.

(2) 廣義積分指數律: 對於指數函數的合成函數,

$$\int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C$$

其中第一個與第二個等號成立乃是先根據代入法的原則, 將 $\frac{du}{dx}dx$ 表成微分差 du, 形成對 u 的積分, 再根據 (1) 的指數積分所致.

(3) 簡單積分對數律:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, x \neq 0$$

此乃因爲當 $x > 0$ 時,

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{1}$$

又當 $x < 0$ 時,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\ln|x|] &= \frac{d}{dx}\ln(-x) \\ &= \frac{1}{-x}\cdot(-x)' \\ &= \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{2}$$

故當 $x \neq 0$ 時, 由 (1) 式與 (2) 式知,

$$\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x}$$

因而根據不定積分的定義得證.

(4) 廣義積分對數律: 對於 $\frac{1}{x}$ 的合成函數,

$$\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$$

此乃因爲根據代入法, 先將 $\frac{du}{dx}dx$ 表成微分差 du, 形成對 u 的積分, 再由 (3) 的簡單積分對數律所致.

例 1. 試求下列各項不定積分.

(a) $\int 3e^x dx$

(b) $\int 5e^{5x} dx$

(c) $\int 2e^{5x+2} dx$

(d) $\int 3xe^{-x^2+1} dx$

<解> (a) 因爲被積函數爲一單純的指數函數的 3 倍, 故根據積分的常數乘法規則以及簡單積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 3\int e^x dx \\ &= 3(e^x + C) \\ &= 3e^x + 3C = 3e^x + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因爲 $3C$ 亦是代表任意常數, 故爲簡化起見, 均以 C 表示, 且以下均按照此約定.

(b) 因爲被積函數中的合成函數爲

$$e^{5x}$$

故根據型式辨識法或代入法, 令

$$u = 5x$$

並經由適當的改寫, 以及廣義積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \underbrace{e^{5x}}_{e^u} \underbrace{(5)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + C = e^{5x} + C \end{aligned}$$

(c) 因爲被積函數中的合成函數爲

$$e^{5x+2}$$

故根據型式辨識法或代入法, 視 $5x+2$ 爲 u, 並經由同乘除 5 的適當改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{2}{5} \underbrace{e^{5x+2}}_{e^u} \underbrace{(5)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{2}{5} e^{5x+2} + C \end{aligned}$$

(d) 顯然地, 被積函數中的合成函數爲

$$e^{-x^2+1}$$

故根據型式辨識法或代入法, 令

$$u = -x^2 + 1$$

得

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

並經由同乘除 (-2) 的改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分指數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int -\frac{3}{2} \underbrace{e^{-x^2+1}}_{e^u} \underbrace{(-2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= -\frac{3}{2} e^{-x^2+1} + C \end{aligned}$$

例 2. 試求下列各項不定積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{7}{x} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2} dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{2}{4x+5} dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{7x}{1-x^2}dx$

<解> (a) 因爲被積函數是單純的 $\frac{1}{x}$ 的 7 倍，故根據積分的常數乘法規則，以及簡單積分對數律，得

$$原式 = 7\int \frac{1}{x}dx = 7\ln|x| + C$$

(b) 當被積函數是一分式，且分母的導函數是分子的常數倍時，可根據型式辨識法或代入法，將分母視爲 u，形成合成函數

$$\frac{1}{u}$$

再經由適當的改寫，積分的常數乘法規則，以及廣義積分對數律，如

$$u = x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

以及

$$\begin{aligned} 原式 &= \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{(2x)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \ln|u| + C = \ln x^2 + C \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因爲 $x^2 > 0$, 故可去絕對值符號, 但不可再經由對數律化簡爲 $2\ln x + C$, 因爲如此則限制 x 的範圍爲大於 0, 而實際上 x 不等於 0 即可.

(c) 因爲被積函數爲一分式, 且明顯地分母的導函數是分子的常數倍, 故根據型式辨識法或代入法, 令

$$u = 4x + 5$$

並經由同乘除 4 的適當改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣義積分對數律, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{2}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{4x+5}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{(4)}_{\frac{du}{dx}} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |4x+5| + C\end{aligned}$$

(d) 令

$$u = 1 - x^2$$

得

$$\frac{du}{dx} = -2x$$

爲被積函數的分子的常數倍, 故根據型式辨識法或代入法, 經由同乘除 (-2) 的改寫, 積分的常數乘法規則, 以及廣

義積分對數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int -\frac{7}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\frac{1}{u}}\underbrace{(-2x)}_{\frac{du}{dx}}dx \\ &= -\frac{7}{2}\ln|1-x^2|+C \end{aligned}$$

例 3. 試求下列各項不定積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+1}{x^2+1}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{4x^2-2x+3}{x^2}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x-1}dx$

<解> 被積函數均爲分子的次方大於或等於分母的次方的有理函數, 一個處理的原則是, 先經由長除法將原被積函數改寫爲多項式與眞分式的和後, 再經由逐項積分, 積分的冪次規則, 以及廣義積分對數律求不定積分, 如下述.

(a) 經由長除法, 得

$$\frac{x^2+6x+1}{x^2+1}=1+\frac{6x}{x^2+1}$$

故令

$$u=x^2+1$$

得

$$du=(x^2+1)'dx=2xdx$$

兩邊同除 2, 得

$$xdx=\frac{1}{2}du$$

接著, 根據長除法的結果, 逐項積分, 改寫, 代入, 化簡, 積分的常數乘法規則, 以及積分的對數律, 得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\left(1+\frac{6x}{x^2+1}\right)dx \\
&= \int 1dx+\int\frac{6}{x^2+1}\cdot xdx \\
&= x+\int\frac{6}{u}\cdot\frac{1}{2}du \\
&= x+3\int\frac{1}{u}du \\
&= x+3\ln|u|+C \\
&= x+3\ln(x^2+1)+C
\end{aligned}$$

(b) 因爲分母只有一項，故先根據分配律改寫被積函數後，再經由逐項積分，積分的常數乘法規則，簡單積分對數律，以及簡單冪次規則，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx \\ &= 4x-2\ln|x|+3(-1)x^{-1}+C \\ &= 4x-2\ln|x|-\frac{3}{x}+C\end{aligned}$$

(c) 首先，經由長除法，以及逐項積分，得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int\left(x+2+\frac{3}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+2x+3\int\frac{1}{x-1}dx \qquad (3)\end{aligned}$$

接著，令

$$u = x-1$$

得

$$du = (x-1)'dx = dx$$

並經由代入，以及簡單積分對數律，得

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x-1}dx &= \int\frac{1}{u}du \\ &= \ln|u|+C \\ &= \ln|x-1|+C \qquad (4)\end{aligned}$$

最後, 合併 (3) 式與 (4) 式, 得

$$\text{原式} = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + C$$

例 4. 試求下列各項不定積分.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2+e^{-x}}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$

<解> (a) 雖然被積函數是一分式, 根據上述經驗, 一個嘗試是令分母爲 u, 並將被積函數的其餘部份與 dx 表成 du 的常數倍, 再根據簡單積分對數律求不定積分, 亦即,

$$u = 2 + e^{-x}$$

但

$$du = (2+e^{-x})'dx = -e^{-x}dx$$

無法表成其餘部份 $1dx$ 的常數倍, 故代入法或更明確的簡單積分對數律不適用, 而需嘗試其它方法.

一個方式是分母分子同乘 e^x, 並整理, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+e^{-x}}dx &= \int \frac{e^x \cdot 1}{e^x(2+e^{-x})}dx \\ &= \int \frac{e^x}{2e^x+1}dx \qquad (5)\end{aligned}$$

接著, 令

$$u = 2e^x + 1$$

得

$$du = (2e^x+1)'dx = 2e^x dx$$

剛好是其餘部份 $e^x dx$ 的 2 倍. 故, 由 (5) 式, 根據辨識法或代入 u 與

$$e^x dx = \frac{1}{2}du$$

並根據積分的常數乘法規則, 以及簡單積分對數律, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2}du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(2e^x+1) + C\end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因爲 $2e^x+1$ 恆爲正, 而可去絕對值所致.

(b) 同 (a), 先嘗試令

$$u = 1 + xe^{-x}$$

則

$$\begin{aligned} du &= [0 + (x)'e^{-x} + x(e^{-x})']dx \\ &= (1-x)e^{-x}dx \end{aligned}$$

無法表成其餘部份 $(1+e^{-x})dx$ 的常數倍. 故嘗試分子分母同乘 e^x, 並整理, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{e^x(1+e^{-x})}{e^x(1+xe^{-x})}dx \\ &= \int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx \end{aligned} \tag{6}$$

接著, 令

$$u = e^x + x$$

得

$$du = (e^x+1)dx$$

剛好就是被積函數其餘部份 $(e^x+1)dx$.

所以, 由 (6) 式, 將 u 與 du 代入, 並根據簡單積分對數律, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln |e^x + x| + C \end{aligned}$$

(c) 一個積分經驗乃是, 當被積函數中含有 $(\ln x)^n$ 與 $\frac{1}{x}$ 時, 則可透過它們的關係

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

令

$$u = \ln x$$

得

$$du = \frac{1}{x} dx$$

並經由代入, 整理, 得出

$$u^n$$

再根據積分的簡單冪次規則求不定積分, 如下述.

因爲被積函數可改寫成

$$\frac{1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

符合上述的經驗, 故令

$$u = \ln x$$

得

$$du = \frac{1}{x} dx$$

再經由代入, 並根據積分的簡單冪次規則, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx &= \int \frac{1}{u^2} du \\ &= -u^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\ln x} + C \end{aligned}$$