單元 26: 指數函數的導函數
(課本 §4.3)

一. 指數函數的導函數

設 u 爲 x 的可微函數. 則

(1) 對於自然指數函數,

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

亦即, 自然指數的導函數就是函數本身.

(2) 對於自然指數函數與可微函數的合成函數,

$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot u'$$

亦即, 自然指數合成函數的導函數爲此合成函數乘以內部函數的導函數.

(1) 的嚴格證明, 略, 可自行參考課本的直觀說明.

(2) 的證明: 根據連鎖規則及 (1) 的結論,

$$\frac{d}{dx}[e^u] = \frac{d}{du}[e^u] \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

得證.

例 1. 試求下列各函數的導函數.

(a) $f(x) = e^{2x}$

(b) $g(x) = e^{-3x^2}$

(c) $h(x) = 6e^{x^3}$

(d) $k(x) = e^{-x}$

<解> (a) 函數 f 爲 e^x 與 $2x$ 的合成函數, 故根據連鎖規則以及指數函數的導函數公式,

$$f'(x) = e^{2x}\frac{d}{dx}(2x) = 2e^{2x}$$

(b) 因爲 g 爲 e^x 與 $-3x^2$ 的合成函數, 故

$$g'(x) = e^{-3x^2}\frac{d}{dx}(-3x^2) = -6xe^{-3x^2}$$

(c) 同理, 因爲 h 含有 e^x 與 x^3 的合成函數, 故

$$\begin{aligned} h'(x) &= 6e^{x^3}\frac{d}{dx}(x^3) \\ &= 6e^{x^3}\cdot 3x^2 = 18x^2e^{x^3} \end{aligned}$$

(d) 因爲 k 爲 e^x 與 $-x$ 的合成函數, 得

$$\begin{aligned} k'(x) &= e^{-x}\frac{d}{dx}(-x) \\ &= e^{-x}\cdot(-1) = -e^{-x} \end{aligned}$$

例 2. 試求下列各函數的導函數.

(a) $f(x) = xe^x$

(b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(c) $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

(d) $k(x) = xe^x - e^x$

<解> (a) 根據乘法規則及指數函數的導函數公式，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'e^x + x(e^x)' \\ &= e^x + xe^x = e^x(1+x) \end{aligned}$$

(b) 視除以 2 爲乘以 $\frac{1}{2}$，則根據常數乘法規則，指數函數的導函數公式，並逐項微分，得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}(-1)] \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{aligned}$$

(c) 根據除法規則以及指數函數的導函數公式，得

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} \\ &= \frac{e^x x - e^x(1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \end{aligned}$$

(d) 逐項微分，並以乘法規則微分第一項，以及指數函數的導函數公式，得

$$\begin{aligned} k'(x) &= (x)'e^x + x(e^x)' - (e^x)' \\ &= (1)e^x + xe^x - e^x \\ &= xe^x \end{aligned}$$

例 3. 設需求函數

$$p = 56e^{-0.000012x}$$

試求可獲得最大收益的售價.

<解> 根據題意，原問題乃相當於最大化收益

$$R = xp = 56xe^{-0.000012x}, \quad x > 0$$

首先，經由微分並化簡，得

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= 56[(1)e^{-0.000012x} + \\ &\qquad xe^{-0.000012x}(-0.000012)] \\ &= 56e^{-0.000012x}(1 - 0.000012x) \end{aligned}$$

因為指數函數恆為正，故

$$e^{-0.000012x} > 0$$

因而 $\frac{dR}{dx} = 0$ 乃相當於

$$(1 - 0.000012x) = 0$$

得第一類臨界數

$$x = \frac{1}{0.000012} \approx 83333$$

無第二類臨界數, 因爲 $\frac{dR}{dx}$ 恆定義.

驗證: 根據所求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dR}{dx}$ 在每個子區的符號, 如下述及圖示.

$\left(0, \frac{1}{0.000012}\right)$: $\frac{dR}{dx} = (+)(+) = (+)$, 遞增.

$\left(\frac{1}{0.000012}, \infty\right)$: $\frac{dR}{dx} = (+)(-) = (-)$, 遞減.

因此, 當銷售量

$$x = \frac{1}{0.000012} \approx 83333$$

亦即, 對應的售價

$$p = 56e^{-0.000012 \cdot \frac{1}{0.000012}} = 56e^{-1}$$

時, 可得最大收益.

二. 常態機率密度函數

常態機率密度函數 (normal probability density function) 定義爲, 對所有的 $-\infty < x < \infty$,

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

其中常數 (參數) μ, 讀作 mu, 為期望值 (mean), 乃表示此函數的中心位置;另一個參數 σ, 讀作 sigma, 為標準差 (standard deviation), 乃表示此函數偏離中心位置的程度.

常態機率密度函數的用途乃在於模型化 (modeling) 鐘型 (bell-shaped) 的資料直方圖.

當 $\mu = 0$ 且 $\sigma = 1$ 時, 得標準常態機率密度函數 (standard normal pdf)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

圖形如下.

為何如此? 根據指數函數的導函數公式, 對 x 微分, 得

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (-x)$$

因為 $e^{-x^2/2} > 0$, 故 $f' = 0$ 乃相當於

$$-x = 0$$

得第一類臨界數

$$x = 0$$

無第二類臨界數，因爲 f' 恆定義.

驗證：f' 在二個子區間的符號如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$：$f' = (+)(+) = (+)$，遞增.

$(0, \infty)$：$f' = (+)(-) = (-)$，遞減.

因此，f 在 $x = 0$ 有相對極大值，亦爲絕對最大值，

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

根據乘法規則以及指數函數的導函數公式，再對 x 微分並化簡，得

$$\begin{aligned} & f''(x) \\ = \ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-x^2/2}(-x)(-x) + e^{-x^2/2}(-1)] \\ = \ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(x^2 - 1) \end{aligned}$$

因爲 $e^{-x^2/2} > 0$，故 $f'' = 0$ 乃相當於

$$x^2 - 1 = 0$$

得第一類反曲候選點

$$x = -1,\ 1$$

無第二類反曲候選點, 因為 f'' 恆定義.

驗證: f'' 在三個子區間的符號如下述及圖示.

$(-\infty, -1)$: $f'' = (+)(+) = (+)$, 上凹.

$(-1, 1)$: $f'' = (+)(-) = (-)$, 下凹.

$(1, \infty)$: $f'' = (+)(+) = (+)$, 上凹.

因為 f 在 $x = -1$ 與 $x = 1$ 附近的凹性均改變, 故得二個反曲點

$$(-1, f(-1)) = \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2}\right)$$

以及

$$(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2}\right)$$

最後,描出所求得的一個絕對最大值, 二個反曲點, 並將 f' 與 f'' 的符號分別標記在 x 軸的上方與下方, 再逐次地由

左至右, 根據 f 在每個子區間的遞增遞減性以及凹性, 繪出對應的曲線, 並連結描出的各點, 如下述及圖示.

$(-\infty,-1)$: $f'=(+)$, $f''=(+)$, 遞增且上凹.

$(-1,0)$: $f'=(+)$, $f''=(-)$, 遞增且下凹.

$(0,1)$: $f'=(-)$, $f'(-)$, 遞減且下凹.

$(1,\infty)$: $f'=(-)$, $f''=(+)$, 遞減且上凹.

因此, 得 f 的圖形, 其中期望值

$$\mu=0$$

乃是產生最大值的地方, 且標準差

$$\sigma=1$$

乃使得由期望值偏離標準差後的位置是產生反曲點的地方.