單元 63: 一階線性微分方程式
(課本 §C.3)

定義. 一階線性微分方程式的標準式爲

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 爲 x 的連續函數, 意即在型式上除了有一項爲 x 的函數 $P(x)$ 與一個特別的 y 的函數 y 的乘積外, 又多了一項純 x 的函數 $Q(x)$, 以致於通常無法形成可分離微分方程式, 而是一種新的型式.

註. 稱爲一階乃因爲最高階數的導函數是一階導函數 y'; y 稱作 0 階導函數. 因爲 y 爲欲求的函數, 最高次方爲 1, 又 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 分別位於欲求的函數 y 之前與常數項, 故稱作係數, 且具有線性的特徵, 因而稱此類的微分方程式爲一階線性微分方程式 (first-order linear differential equation).

問. 如何求一階線性微分方程式的一般解?

答. 構想如下. 首先, 等號左邊爲

$$y' + P(x)y$$

與微分的乘法規則

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x)y' + u'(x)y$$

有類似的地方, 此乃暗示, 可設法在等號兩邊同乘一個積分因式 (integration factor)

$$u(x)$$

使得等號左邊變成

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] \tag{1}$$

等號右邊成爲

$$Q(x)u(x)$$

亦即,

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = Q(x)u(x)$$

則兩邊對 x 積分, 得

$$u(x)y = \int Q(x)u(x)dx$$

因此, 一般解爲

$$y = \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)dx \tag{2}$$

且問題的關鍵乃在於如何求得適當的積分因式

$$u(x)$$

由上述積分因式的功能，亦即 (1) 式，知積分因式

$$u(x)$$

必須滿足

$$u(x)y' + u(x)P(x)y = \frac{d}{dx}[u(x)y]$$

亦相當於

$$u(x)y' + u(x)P(x)y = u(x)y' + u'(x)y$$

經整理後，得

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = P(x)$$

接著，兩邊積分，得

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \int P(x)dx$$

再根據選取

$$u = u(x),\ du = u'(x)dx$$

的代入法以及積分的對數規則，可由上式得

$$\ln|u(x)| = \int P(x)dx + C$$

因爲欲求的積分因式在對數函數內，故根據兩邊同取 e 的典型作法，對數與指數的互逆性，指數律，以及以一個簡單

的符號 C 表示適當常數的約定，得

$$\begin{aligned} |u(x)| &= e^{\int P(x)dx+C} = e^C \cdot e^{\int P(x)dx} \\ &= Ce^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

最後，去絕對值，並根據表示常數的約定，得

$$u(x) = \pm Ce^{\int P(x)dx} = Ce^{\int P(x)dx}$$

為方便計，取 $C = 1$ 即可，亦即，積分因式

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{3}$$

因此，綜合 (2) 式與 (3) 式，求一階線性微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的過程為

(1) 求積分因式

$$u(x) = e^{\int P(x)dx}$$

(2) 一般解為

$$y = \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)dx$$

例 1. 試求下列各微分方程式的一般解.

(a) $y' + y = e^x$

(b) $y' - 2xy = 2x$

(c) $xy' - 2y = x^2,\ x > 0$

<解> 解微分方程式的首要步驟是經由改寫等過程, 辨識出原微分方程式是哪一類型的微分方程式. 在目前的學習階段僅考慮可分離微分方程式與一階線性微分方程式兩種類型, 故若爲可分離微分方程式, 則根據變數分離法求解; 若爲一階線性微分方程式, 則以上述先求積分因式

$$u(x) = e^{\int P(x)dx}$$

再積分出一般解

$$y = \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)dx$$

的過程求解.

(a) 經由辨識, 明顯地, 原式爲

$$P(x) = 1$$

且

$$Q(x) = e^x$$

一階線性微分方程式. 故根據上述求解的過程以及常數的積分規則, 首先得積分因式

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int 1dx} = e^x \end{aligned}$$

接著, 根據一般解的公式, 代入上式的積分因式, 指數函數的積分規則, 以及指數律的化簡, 得一般解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)dx \\ &= \frac{1}{e^x}\int e^x \cdot e^x dx \\ &= e^{-x}\int e^{2x}dx \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x} \end{aligned}$$

(b) 明顯地, 原式爲

$$P(x) = -2x$$

且

$$Q(x) = 2x$$

的一階線性微分方程式，故首先根據積分的冪次規則，得積分因式

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int -2xdx} = e^{-x^2} \end{aligned}$$

接著，代入此積分因式，並根據選取

$$u = -x^2,\ du = -2xdx$$

的代入法，以及指數律的化簡整理，得一般解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)dx \\ &= \frac{1}{e^{-x^2}} \int 2x \cdot e^{-x^2} dx \\ &= e^{x^2} \int -e^{-x^2}(-2x)dx \\ &= e^{x^2}(-e^{-x^2} + C) = -1 + Ce^{x^2} \end{aligned}$$

<另解> 或經由移項整理的改寫，得原式乃相當於

$$y' = 2x(1+y)$$

亦即，

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y)$$

爲一可分離微分方程式, 故由變數分離, 得

$$\frac{1}{1+y}dy = 2xdx$$

接著, 兩邊積分, 得

$$\int \frac{1}{1+y}dy = \int 2xdx$$

再根據對數的積分規則以及積分的冪次規則, 由上式得

$$\ln|1+y| = x^2 + C$$

兩邊取 e, 並根據對數與指數的互逆性, 指數律, 以及常數表示法的約定, 上式亦相當於

$$|1+y| = e^{x^2+C} = Ce^{x^2}$$

最後, 去絕對值, 並根據表示適當常數的約定, 得

$$1+y = \pm Ce^{x^2} = Ce^{x^2}$$

因此, 一般解

$$y = -1 + Ce^{x^2}$$

(c) 同除大於 0 的 x, 得原式乃相當於標準式

$$y' - \frac{2}{x}y = x$$

爲一

$$P(x) = -\frac{2}{x}$$

且

$$Q(x) = x$$

的一階線性微分方程式, 故在 x 大於 0 的假設下, 根據對數的積分規則, 對數律, 以及對數與指數的互逆性, 得積分因式

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} \\ &= e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} \end{aligned}$$

接著, 代入此積分因式, 並根據一般解的公式, 對數的積分規則且在 x 大於 0 的假設下, 得一般解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)}\int Q(x)u(x)dx \\ &= \frac{1}{x^{-2}}\int x\cdot x^{-2}dx \\ &= x^2\int \frac{1}{x}dx \\ &= x^2(\ln x + C) = x^2\ln x + Cx^2 \end{aligned}$$

例 2. 試求微分方程式

$$y' + 2y = e^{-2x}$$

滿足初始條件

$$x = 1,\ y = 4$$

的特殊解.

<解> 顯然地, 原式爲

$$P(x) = 2$$

且

$$Q(x) = e^{-2x}$$

的一階線性微分方程式, 故根據常數的積分規則, 得積分因式

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int 2dx} = e^{2x} \end{aligned}$$

接著, 代入此積分因式, 並根據一般解的公式, 指數律的化簡整理, 以及常數的積分規則, 得一般解

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)dx \\ &= \frac{1}{e^{2x}} \int e^{-2x} \cdot e^{2x} dx \\ &= e^{-2x} \int 1dx \\ &= e^{-2x}(x + C) \end{aligned}$$

再代入初始條件

$$x = 1, \ y = 4$$

得

$$4 = e^{-2(1)}(1 + C)$$

並經由兩邊同乘 e^2 以及指數律的化簡, 得

$$4e^2 = 1 + C$$

故

$$C = 4e^2 - 1$$

最後, 將求得的 C 代入一般解, 得特殊解

$$y = e^{-2x}(x + 4e^2 - 1)$$

例 3. 假設一連續年金 (continuous annuity trust fund) 乃是由存款帳戶中以每年 \$1000 的比率轉存入此年金, 且以 8% 的連續複利方式產生利息. 試求此年金 20 年後的結餘.

<解> 這是一個應用的問題, 目的是求 20 年後的結餘. 解題的策略是先根據題意列出相關的方程式, 求出一般在

t 年後的結餘, 再求得 20 年後的結餘. 由題意知, 所得的是有關結餘的訊息, 亦即, 結餘以每年固定的 \$1000 的比率增加, 再加上 8% 連續複利的利息增加量, 故令 $A(t)$ 爲 t 年後的結餘, 則可得結餘的變化率

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{0.08A(t)}_{\text{利息}} + \underbrace{1000}_{\text{存款}}$$

因此, 原問題乃相當於求微分方程式

$$\frac{dA}{dt} = 0.08A(t) + 1000$$

滿足一般常識的初始條件

$$t = 0, \ A = 0$$

的特殊解. 將此微分方程式化成標準式, 得

$$\frac{dA}{dt} - 0.08A(t) = 1000$$

爲一個

$$P(t) = -0.08$$

且

$$Q(t) = 1000$$

的一階線性微分方程式, 故根據常數的積分規則, 得積分因式

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int P(t)dt} \\ &= e^{\int -0.08dt} = e^{-0.08t} \end{aligned}$$

接著，代入此積分因式，並根據一般解的公式，指數函數的積分公式，以及指數律的化簡整理，得一般解

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{u(t)}\int Q(t)u(t)dt \\ &= \frac{1}{e^{-0.08t}}\int 1000e^{-0.08t}dt \\ &= e^{0.08t}\left(-\frac{1000}{0.08}e^{-0.08t}+C\right) \\ &= -12500+Ce^{0.08t} \end{aligned}$$

再代入初始條件

$$t=0,\ A=0$$

得

$$0=-12500+Ce^{0}=-12500+C$$

故

$$C=12500$$

最後，將求得的 C 代入一般解，得特殊解，亦即 t 年後的結餘

$$A(t)=-12500+12500e^{0.08t}$$

因此，20 年後的結餘

$$\begin{aligned} A(20) &= -12500+12500e^{0.08(20)} \\ &\approx 49412.91 \end{aligned}$$