作業題7.9. 定義隨機變數

$$M = \{n : U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_{n-1} > U_n\}$$

其中

$$U_1, \ldots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{unif}(0,1)$$

即 M 爲持續生成隨機數直至第一次生成的隨機數小於前一個隨機數所需的模擬次數. 明顯地, M 的可能值爲 $2, 3, \ldots$.

(a) 試證 $P(M > n) = \frac{1}{n!}$, $n \ge 0$.

(b) 試證

$$E(M) = \sum_{n=0}^{\infty} P(M > n) = e$$

(c) 試根據迭代公式估計一個 e 的 95%, 長度 0.01 的信賴區間以及所需的樣本大小.

(a) 小題:

<證明> $n = 0,\ 1$,

$$P(M > n) = P(M \ge 2) = P(M \text{ 爲所有可能值}) = 1 = \frac{1}{n!}$$

成立. $n \ge 2$,

$$\begin{aligned} P(M > n) &= P(\text{所需的模擬次數大於 } n \text{ 才得到生成的隨機數小於前一個}) \\ &= P(\text{前面生成 } n \text{ 個遞增的隨機數}) \\ &= P(U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n) \end{aligned} \tag{1}$$

因爲

$$U_1, \ldots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{unif}(0,1)$$

可得

$$P(U_{\omega_1} \le U_{\omega_2} \le \cdots \le U_{\omega_n}) = P(U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n)$$

其中 $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ 爲 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的任一排列, 共有 $n!$ 個. 又

$$\{(U_{\omega_1} \le U_{\omega_2} \le \cdots \le U_{\omega_n})\}$$

樣本空間的一分割, 故得

$$n!P(U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n) = 1 \tag{2}$$

最後, 根據 (1) 及 (2) 式,

$$P(M > n) = \frac{1}{n!}$$

得證.

(b) 小題:

<證明> 根據期望值的定義,

$$\begin{aligned} E(M) &= \sum_{n=2}^{\infty} nP(M = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(M = n) \qquad (\text{因爲 } P(M = 1) = 0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(M \ge n) \qquad (\text{交換累加次序}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M > n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e \qquad (\text{根據 } e^x \text{ 的泰勒展開式在 } x = 1 \text{ 的值}) \end{aligned}$$

得證.

(c) 小題:
<演算法>
1. 令 $M=2$ 且生成 $U\sim \text{unif}(0,1)$.
2. 生成 $V\sim \text{unif}(0,1)$.
3. 若 $U>V$, 輸出 M 且結束.
4. 令 $U=V$, $M=M+1$, 回到步驟 2.
5. 令 $d=\dfrac{0.01}{2(1.96)}$.
6. 重覆步驟 1-4, 生成 $n=100$ 個資料.
7. 根據迭代公式, 若

$$\frac{s}{\sqrt{n}}<d$$

輸出信賴區間 $\overline{x}\pm 0.005$ 以及 n.

8. 根據步驟 1-4, 再生成一筆資料, $n=n+1$, 回到步驟 7.

註. 估計值: 信賴區間 $(2.71578175343395, 2.72578175343395)$; 樣本大小 117694.