

單元 11: 乘積與分式法則

(課本 §2.4)

一. 乘積法則 (Product Rule)

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為可微, 則

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

註 1. 根據乘法與加法的交換律, 乘積法則可有不同的呈現方式, 如

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

或其他, 但重點卻是兩個函數都要分別被微分並同時乘上未被微分的函數, 再將前面的結果相加.

註 2 乘積法則不同於加減法則, 絕對不可以將每個函數微分後再相乘, 亦即, 不可以逐項微分再做對應的乘法運算, 如下述

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$$

註 3. 乘積法則可推廣至三個以上的函數，亦即每個函數都分別被微分並同時乘上未被微分的函數，再將這些結果相加，如

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] \\ = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + \\ f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

二. 分式法則 (Quotient Rule)

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均可微，則當 $g(x) \neq 0$ 時，

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

亦即，分母的平方分之一，再乘上 “分子的導函數乘分母減分子乘分母的導函數”。

註 1. 根據乘法的交換律，只可將含乘積的項做不同形式的呈現，如

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

或其他的形式，但重點還是先對分子微分乘上分母，再減去分子乘上對分母微分。

註 2. 因為沒有減法的交換律, 絕對不可將微分的次序交換, 亦即先對分母微分, 再將分子微分, 如

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] \neq \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[g(x)]^2}$$

註 3. 與乘積法則一樣, 絕對不可以將每個函數微分後再相除, 亦即, 不可以逐項微分後再做對應的除法運算, 如下述

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1. 試求下列各項的導函數.

(a) $y = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) (x - 1)$

(c) $y = 2x^2 \left(x + \frac{4}{x^3} \right)$

<解> (a) 因為 y 為兩個函數的乘積, 故直接根據乘積法則, 得

$$\begin{aligned}y' &= (3x - 2x^2)'(5 + 4x) + \\&\quad (3x - 2x^2)(5 + 4x)' \\&= (3 - 4x)(5 + 4x) + (3x - 2x^2)(4) \\&= 15 + 12x - 20x - 16x^2 + 12x - 8x^2 \\&= -24x^2 + 4x + 15\end{aligned}$$

(b) 首先, 僅可能的將每一項改寫成 cx^n 的形式, 得

$$f(x) = (x^{-1} + 1)(x - 1)$$

接著, 根據乘積法則, 得

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^{-1} + 1)'(x - 1) + \\&\quad (x^{-1} + 1)(x - 1)' \\&= (-1)x^{-2}(x - 1) + (x^{-1} + 1)(1)\end{aligned}$$

最後, 透過展開以及提出最小次方因式的化簡步驟, 得

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^{-1} + x^{-2} + x^{-1} + 1 \\&= x^{-2}(-x + 1 + x + x^2) \\&= \frac{1 + x^2}{x^2}\end{aligned}$$

(c) 因為形成乘積的二因式中，有一個只有一項，故簡單的作法是展開後，逐項微分，而避開較複雜的乘積法則，亦即，

$$f(x) = 2x^3 + 8x^{-1}$$

且經由逐項微分，得

$$f'(x) = 6x^2 - 8x^{-2} = \frac{6x^4 - 8}{x^2}$$

例 2. 試求下列各項的導函數.

$$(a) \ y = \frac{x - 1}{2x + 3}$$

$$(b) \ y = \frac{3 - \frac{1}{x}}{x + 5}$$

$$(c) \ f(x) = \frac{-3(3x - 2x^2)}{7x}$$

$$(d) \ y = \frac{(1 - 2x)(3x + 2)}{5x - 4}$$

<解> (a) 因為 y 為兩個函數的商, 故直接根據分式法則, 得

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x-1)'(2x+3) - (x-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} \\&= \frac{(2x+3) - (x-1)(2)}{(2x+3)^2}\end{aligned}$$

最後, 將分子展開化簡, 得

$$y' = \frac{5}{(2x+3)^2}$$

(b) 因為原式為一個繁分式, 故經由分子與分母同乘 x 的化簡步驟, 得

$$y = \frac{3x-1}{x^2+5x}$$

接著, 根據分式法則,

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(3x-1)'(x^2+5x) - (3x-1)(x^2+5x)'}{(x^2+5x)^2} \\&= \frac{3(x^2+5x) - (3x-1)(2x+5)}{(x^2+5x)^2} \\&= \frac{3x^2+15x-6x^2+2x-15x+5}{(x^2+5x)^2} \\&= \frac{-3x^2+2x+5}{(x^2+5x)^2}\end{aligned}$$

(c) 因為分母只有一項，故一個簡單的作法是根據分配律，將分子的每一項改寫成 cx^n 的形式後，再逐項微分，而避開較複雜的分式法則，亦即，將分子與分母的常數提出後，再根據分配律，得

$$f(x) = -\frac{3}{7}(3 - 2x)$$

最後，經由逐項微分，

$$f'(x) = -\frac{3}{7}(-2) = \frac{6}{7}$$

(d) 因為原式的分子為一乘積，故直接使用分式法則時，會在微分的過程中也用到乘積法則，整體而言，較複雜，可自行嘗試看看。一個簡單的作法是，在可行的情況下，儘可能地只使用分式法則或乘積法則中的一種，而避開同時使用二種法則，故根據原式，可行的作法是先將分子展開，得

$$y = \frac{-6x^2 - x + 2}{5x - 4}$$

再根據分式法則，得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-12x - 1)(5x - 4) - (-6x^2 - x + 2)(5)}{(5x - 4)^2} \\ &= \frac{-60x^2 + 43x + 4 + 30x^2 + 5x - 10}{(5x - 4)^2} \\ &= \frac{-30x^2 + 48x - 6}{(5x - 4)^2} \end{aligned}$$