

單元 20: 商業與經濟的應用

(課本 §3.5)

例 1. 設銷售 x 件產品的收益

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52500x$$

試求獲致最大收益的銷售量.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化

$$R = -x^3 + 450x^2 + 52500x, \quad x > 0$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分並分解, 得

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dx} &= -3x^2 + 900x + 52500 \\ &= -3(x^2 - 300x - 17500) \\ &= -3(x - 350)(x + 50)\end{aligned}$$

第一類臨界數: $\frac{dR}{dx} = 0$, 乃相當於

$$(x - 350)(x + 50) = 0$$

得

$$x = 350, -50 \text{ (不合, 因為 } x > 0)$$

第二類臨界數: $\frac{dR}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因為 $\frac{dR}{dx}$ 為一多項式, 恆定義.

(ii) **驗證.** 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dR}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 350)$: $\frac{dR}{dx} = (-)(-)(+) = (+)$, 遞增.

$(350, \infty)$: $\frac{dR}{dx} = (-)(+)(+) = (-)$, 遞減.

故, 根據一階導數檢定法, 當 $x = 350$ 時, 有相對極大值. 又因為只有一個臨界數, 此相對極大值亦為一絕對最大值, 如所求.

因此, 當銷售量 x 為 350 件時, 可得最大收益.

例 2. 設生產 x 件產品的總成本

$$C = 800 + 0.04x + 0.0002x^2$$

試求可獲致最低平均成本的生產量.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最小化平均成本

$$\begin{aligned}\bar{C} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{x} \\ &= \frac{800}{x} + 0.04 + 0.0002x, \quad x > 0\end{aligned}$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分並化簡, 得

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{C}}{dx} &= -\frac{800}{x^2} + 0.0002 \\ &= \frac{2 \times 10^{-4}x^2 - 800}{x^2}\end{aligned}$$

第一類臨界數: $\frac{d\bar{C}}{dx} = 0$, 亦相當於分子

$$2 \times 10^{-4}x^2 - 800 = 0$$

得

$$x^2 = \frac{800}{2 \times 10^{-4}} = 400 \times 10^4 = 4 \times 10^6$$

由此導出

$$x = \pm\sqrt{4 \times 10^6} = \pm 2 \times 10^3 = \pm 2000$$

但負不合, 因為 $x > 0$.

第二類臨界數: $\frac{d\bar{C}}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因為當 $x > 0$ 時, $\frac{d\bar{C}}{dx}$ 恆定義.

(ii) **驗證.** 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{d\bar{C}}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 2000): \frac{d\bar{C}}{dx} = (-)$, 遞減.

$(2000, \infty): \frac{d\bar{C}}{dx} = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, 當 $x = 2000$ 時, 有相對極小值. 又因為只有一個臨界數, 此相對極小值亦為一絕對最小值, 如所求.

因此, 當產量 x 為 2000 件時, 平均成本最低.

例 3. 設某產品的售價為 10 元時, 每月可售出 2000 件. 若每降 0.25 元時, 可多售出 250 件, 如

$$p = 9.75, x = 2250$$

$$p = 9.50, x = 2500$$

⋮

試求可獲致最大收益的售價 p .

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化收益

$$R = xp$$

因爲要求最佳售價 p , 故需將 x 表成 p 並代入 R . 首先, 由已知, 得銷售量

$$\begin{aligned}x &= 2000 + \left(\frac{10-p}{0.25}\right)(250) \\&= 2000 + (10-p)(1000) \\&= 12000 - 1000p, \quad 0 \leq p \leq 10\end{aligned}$$

代入 R , 得原問題乃相當於最大化

$$\begin{aligned}R &= (12000 - 1000p)p \\&= 12000p - 1000p^2, \quad 0 \leq p \leq 10\end{aligned}$$

故, (i) 求臨界數. 經由微分, 得

$$\frac{dR}{dp} = 12000 - 2000p$$

第一類臨界數: $\frac{dR}{dp} = 0$, 得

$$p = \frac{12000}{2000} = 6$$

第二類臨界數: $\frac{dR}{dp}$ 未定義的 p 值, 無, 因爲 $\frac{dR}{dp}$ 爲一多項式, 恆定義.

(ii) **驗證**. 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dR}{dp}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 6)$: $\frac{dR}{dp} = (+)$, 遞增.

$(6, 10)$: $\frac{dR}{dp} = (-)$, 遞減.

所以, 根據一階導函數檢定法, 當 $x = 6$ 時, 有相對極大值. 又因為只有一個臨界數, 此相對極大值亦為一絕對最大值, 如所求.

因此, 當售價 p 為 6 元時, 可獲得最大收益.

例 4. 設某產品的需求函數為

$$p = \frac{50}{\sqrt{x}}$$

且生產 x 件的總成本為

$$C = 0.5x + 500$$

試求可獲得最大利潤的售價.

<解> 根據題意, 需最大化利潤

$$P = R - C = xp - C$$

代入 p 與 C , 得最大化利潤

$$\begin{aligned} P &= x \cdot \frac{50}{\sqrt{x}} - (0.5x + 500) \\ &= 50\sqrt{x} - 0.5x - 500, \quad x > 0 \end{aligned}$$

故, (i) 求臨界值. 經由微分及化簡, 得

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{25}{\sqrt{x}} - 0.5 \\ &= \frac{25 - 0.5\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

第一類臨界數: $\frac{dP}{dx} = 0$, 乃相當於分子

$$25 - 0.5\sqrt{x} = 0$$

得

$$\sqrt{x} = 50$$

亦即,

$$x = 50^2 = 2500$$

第二類臨界數: $\frac{dP}{dx}$ 未定義的 x 值, 無, 因為當 $x > 0$ 時, $\frac{dP}{dx}$ 恆定義.

(ii) **驗證**. 根據上述求得的一個臨界數, 得二個子區間以及 $\frac{dP}{dx}$ 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(0, 2500)$: $\frac{dP}{dx} = (+)$, 遞增.

$(2500, \infty)$: $\frac{dP}{dx} = (-)$, 遞減.

故, 根據一階導函數檢定法, 當 $x = 2500$ 時, 有相對極大值. 又因為只有一個臨界數, 此相對極大值亦為一絕對最大值, 如所求.

因此, 當銷售量為 2500 件時, 可得最大利潤, 而此時的售價

$$p = \frac{50}{\sqrt{x}} \Big|_{x=2500} = \frac{50}{\sqrt{2500}} = 1$$

註. 根據上述的例題及事實, 得最大利潤的銷售量 x 乃

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

的 x 值, 根據 $P = R - C$, 亦相當於

$$\frac{d}{dx}(R - C) = 0$$

的 x 值。經由逐項微分，上式亦相當於

$$\frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 0$$

的 x 值，亦即，

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dC}{dx}$$

的 x 值，也就是，邊際收益等於邊際成本的 x 值。

因此，產生最大利潤的銷售量就是當邊際收益等於邊際成本時的銷售量，符合實際的經驗。

需求的售價彈性 (price elasticity of demand)

一種指標可度量消費者對售價變化的反應程度。

直觀，非正式的定義為

- (1) 需求為有彈性的 (elastic): 當需求量有明顯的反應時，如蔬菜的售價 $\downarrow$ ，銷售量 $\uparrow$ (大)。
- (2) 需求為無彈性的 (inelastic): 當需求量無明顯的反應時，如牛奶與水的售價 $\downarrow$ ，銷售量 $\uparrow$ (小)。

(3) 反應大小的表示法: 以單位銷售量的變化率 $\frac{\Delta x}{x}$ 與單位售價的變化率 $\frac{\Delta p}{p}$ 的比值作為售價改變對於銷售量反應的度量指標, 亦即, 以

$$\frac{\Delta x/x}{\Delta p/p} = \frac{p/x}{\Delta p/\Delta x}$$

作為度量指標. 又根據導函數的定義,

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

故

$$\frac{dp}{dx} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

由此得度量指標

$$\frac{\Delta x/x}{\Delta p/p} = \frac{p/x}{\Delta p/\Delta x} \approx \frac{p/x}{dp/dx} \stackrel{\text{def}}{=} \eta$$

其中 η 讀作 eta, 可度量售價變化時, 消費者需求的反應程度, 如下述的正式定義.

正式, 嚴格的

定義. 令

$$p = f(x)$$

爲一需求函數。需求的售價彈性 (price elasticity of demand)

$$\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p/x}{dp/dx}$$

且在一給定的售價 p 之下，稱需求爲

有彈性的 (elastic), 若 $|\eta| > 1$

無彈性的 (inelastic), 若 $|\eta| < 1$

單位彈性 (unit elasticity), 若 $|\eta| = 1$

註。需求的售價彈性與總收益的關係，如下述。

由總收益

$$R = xp$$

對 x 微分，得

$$\frac{dR}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

則

(1) 當

$$\frac{dR}{dx} > 0$$

亦即，總收益 R 遞增時，根據 (1) 式，此乃相當於

$$x \frac{dp}{dx} > -p$$

因為 $x > 0$ ，故亦相當於

$$\frac{dp}{dx} > -\frac{p}{x}$$

又因為當銷售量增加時，售價下降，亦即，

$$\frac{dp}{dx} < 0$$

故上式亦相當於

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| < \left| -\frac{p}{x} \right| = \left| \frac{p}{x} \right|$$

如圖示.

故，由上式，得

$$|\eta| = \frac{|p/x|}{|dp/dx|} > 1$$

亦即，需求為有彈性的.

因此，需求為有彈性的乃相當於可經由降價而增加總收益，亦即，

$$|\eta| > 1 \Leftrightarrow \frac{dR}{dx} > 0$$

(2) 當

$$\frac{dR}{dx} < 0$$

亦即，總收益 R 遞減時，根據 (1) 式，此乃相當於

$$x \frac{dp}{dx} < -p$$

同理，因為 $x > 0$ ，故亦相當於

$$\frac{dp}{dx} < -\frac{p}{x}$$

又因為當銷售量增加時，售價下降，亦即，

$$\frac{dp}{dx} < 0$$

故上式亦相當於

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| > \left| -\frac{p}{x} \right| = \left| \frac{p}{x} \right|$$

如圖示.

故，由上式，得

$$|\eta| = \frac{|p/x|}{|dp/dx|} < 1$$

亦即，需求為無彈性的.

因此，需求為無彈性的乃相當於無法經由降價而增加

總收益，亦即，

$$|\eta| < 1 \Leftrightarrow \frac{dR}{dx} < 0$$

(3) 當

$$\frac{dR}{dx} = 0$$

亦即，總收益 R 為最大時，根據 (1) 式，此乃相當於

$$x \frac{dp}{dx} = -p$$

亦相當於

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x}$$

故，

$$|\eta| = \frac{|p/x|}{|dp/dx|} = \frac{|p/x|}{|-p/x|} = 1$$

亦即，需求為單位彈性。

因此，需求為單位彈性乃相當於總收益為最大時，亦即，

$$|\eta| = 1 \Leftrightarrow \frac{dR}{dx} = 0$$

例 5. 設需求函數為

$$p = \sqrt{450 - x}, \quad 0 < x < 450$$

(a) 試討論需求的售價彈性, 以及 (b) 根據 (a), 試說明總收益函數的行為.

<解> (a) 首先, 根據廣義冪次法則, 將售價 p 對 x 微分, 得

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{2}(450 - x)^{-1/2}(-1) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{450 - x}} \end{aligned}$$

接著, 根據定義, 得需求的售價彈性

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{p/x}{dp/dx} = \frac{\frac{\sqrt{450-x}}{x}}{\frac{-1}{2\sqrt{450-x}}} \\ &= -\frac{2(450 - x)}{x} = -\frac{900}{x} + 2 \end{aligned}$$

故, 當 $0 < x < 450$ 時, $\eta < 0$. 由此得

$$|\eta| = \frac{900}{x} - 2$$

因此,

(1) $|\eta| = 1$ 乃相當於

$$\frac{900}{x} - 2 = 1$$

得

$$x = 300$$

(2) $|\eta| > 1$ 乃相當於

$$\frac{900}{x} - 2 > 1$$

亦相當於

$$\frac{900}{x} > 3$$

故當 $x > 0$ 時, 得

$$0 < x < 300$$

(3) $\eta < 1$ 乃相當於

$$\frac{900}{x} - 1 < 2$$

亦即,

$$\frac{900}{x} < 3$$

故在 $0 < x < 450$ 的條件下, 得

$$300 < x < 450$$

因此, 根據定義, 需求為

有彈性的, 當 $0 < x < 300$.

無彈性的, 當 $300 < x < 450$.

單位彈性, 當 $x = 300$.

(b) 根據需求的售價彈性與總收益的關係, 由 (a), 得

(i) 當 $0 < x < 300$ 時, 需求為有彈性的, 故

$$\frac{dR}{dx} > 0$$

亦即, 總收益遞增, 如圖示.

(ii) 當 $x = 300$ 時, 需求為單位彈性, 故

$$\frac{dR}{dx} = 0$$

亦即，此時總收益為最大，如圖示.

(iii) 當 $300 < x < 450$ 時，需求為無彈性的，故

$$\frac{dR}{dx} < 0$$

亦即，總收益遞減，如圖示.

註．根據需求的售價彈性判斷總收益行為的優點是，不需要先求出總收益函數，再經由總收益的導函數來判斷，而直接根據已知的需求的售價彈性即可.