

單元 22: 繪圖

(課本 §3.7)

主要的基本工具為 f' 與 f'' , 以例說明如下.

例 1. 試繪函數

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$$

的圖形.

<解> (i) 求容易得到的 x 截距與 y 截距和水平與垂直漸近線.

y 截距: 令 $x = 0$, 得 $y = 5$. 故, y 截距為 $(0, 5)$.

x 截距: 令 $y = 0$, 解 x , 亦即, 求

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

的根, 不容易, 花時間, 故略過, 但不影響繪圖.

垂直漸近線: 無, 因為 f 為多項式.

水平漸近線: 無, 因為 f 為多項式.

註. 基本上, (i) 部份的結果以容易求得的為原則, 若太花時間, 則略過, 並不會影響繪圖.

(ii) 求相對極值. 經由微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\&= 3(x^2 + 2x - 3) \\&= 3(x + 3)(x - 1)\end{aligned}$$

接著, 求臨界數, 亦即, 相對極值候選數 (candidates), 如下述.

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

得

$$x = -3, 1$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 因為 f' 為一多項式, 恆定義.

驗證: 根據求得的二個臨界數, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, -3): f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$(-3, 1): f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$(1, \infty): f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

故, 根據一階導函數檢定法, 函數 f 在 $x = -3$ 有相對極大值; 在 $x = -1$ 有相對極小值.

(iii) 求反曲點. 再微分並化簡, 得二階導函數

$$f''(x) = 6x + 6 = 6(x + 1)$$

接著, 求反曲候選點, 如下述.

第一類: $f'' = 0$, 得

$$x = -1$$

第二類: f'' 未定義的 x 值, 無, 因為 f'' 為多項式, 恆定義.

驗證: 根據求得的一個反曲候選點, 得二個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, -1)$: $f'' = (-)$, 下凹.

$(-1, \infty)$: $f'' = (+)$, 上凹.

因爲凹性在 $x = -1$ 的附近改變, 故在 $x = -1$ 有一反曲點.

(iv) 描點與連結. 根據上述 (i), (ii), (iii) 的結論, 先求出重要的點, 如下述.

將 $x = 0$ 代入 f , 得 $y = 5$, 以及 y 截距 $(0, 5)$.

將 $x = -3$ 代入 f , 得

$$y = -27 + 27 + 27 + 5 = 32$$

以及相對極大值 $(-3, 32)$

將 $x = -1$ 代入 f , 得

$$y = -1 + 3 + 9 + 5 = 16$$

以及反曲點 $(-1, 16)$.

將 $x = 1$ 代入 f , 得

$$y = 1 + 3 - 9 + 5 = 0$$

以及相對極小值 $(1, 0)$

接著，在坐標平面上，描出上述求得的重要點，並將 (ii) 中求得的 f' 的符號標記在 x 軸的上方，以及在 (iii) 中求得的 f'' 的符號標記在 x 軸的下方。

最後，根據 f' 所導出的遞增遞減性，以及 f'' 所導出的凹性，逐次地由左至右，在重要點所分隔出的子區間上繪出對應的曲線，並連結這些重要點，如下述及圖示。

$(-\infty, -3)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹。

$(-3, -1)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹。

$(-1, 0)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹。

$(0, 1)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹。

$(1, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹。

因此，得函數 f 的圖形，如圖示。

例 2. 試繪函數

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$$

的圖形.

<解> (i) 求容易得到的 x 截距與 y 截距和水平與垂直漸近線.

y 截距: 令 $x = 0$, 得 $y = 0$. 故, y 截距為 $(0, 0)$.

x 截距: 令 $y = 0$, 解 x , 亦即, 求

$$x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x = 0$$

的根, 不容易, 花時間, 故略過, 但不影響繪圖.

水平漸近線: 無, 因為 f 為多項式.

垂直漸近線: 無, 因為 f 為多項式.

(ii) 求相對極值. 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 \\ &= 4(x^3 - 9x^2 + 24x - 16) \\ &= 4(x - 1)(x^2 - 8x + 16) \\ &= 4(x - 1)(x - 4)^2 \end{aligned}$$

其中第三個等號成立乃是由第二個等號的右邊項知 1 為一根, 並經由長除法除以 $x - 1$ 所致.

接著，求臨界數，亦即，相對極值候選數 (candidates)，如下述.

第一類臨界數： $f' = 0$ ，亦相當於

$$(x - 1)(x - 4)^2 = 0$$

得

$$x = 1, 4$$

第二類臨界數： f' 未定義的 x 值，無，因為 f' 為一多項式，恆定義.

驗證：根據所求得的二個臨界數，得三個子區間以及 f' 在每個子區間的符號，如下述及圖示.

$(-\infty, 1)$: $f' = (-)(+) = (-)$ ，遞減.

$(1, 4)$: $f' = (+)(+)$ ，遞增.

$(4, \infty)$: $f' = (+)(+)$ ，遞增.

因此，根據一階導函數檢定法，函數 f 在 $x = 1$ 有相對極小值；在 $x = 4$ 無相對極值.

(iii) 求反曲點. 再對 x 微分並化簡, 得二階導函數

$$\begin{aligned}f''(x) &= 12x^2 - 72x + 96 \\&= 12(x^2 - 6x + 8) \\&= 12(x - 2)(x - 4)\end{aligned}$$

接著, 求反曲候選點, 如下述.

第一類: $f'' = 0$, 亦相當於

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

得

$$x = 2, 4$$

第二類: f'' 未定義的 x 值, 無, 因為 f'' 為多項式, 恆定義.

驗證: 根據所得的二個反曲候選點, 得三個子區間以及 f'' 在每個子區間上的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 2)$: $f'' = (-)(-) = (+)$, 上凹.

$(2, 4)$: $f'' = (+)(-) = (-)$, 下凹.

$(4, \infty)$: $f'' = (+)(+) = (+)$, 上凹.

因為函數 f 的凹性在 $x = 2$ 與 $x = 4$ 的附近均改變, 故在 $x = 2$ 與 $x = 4$ 各有一個反曲點.

(iv) 描點與連結. 根據上述 (i), (ii), (iii) 的結論, 先求出重要的點, 如下述.

代 $x = 0$, 得 $y = 0$ 以及 y 截距 $(0, 0)$.

代 $x = 1$, 得

$$y = 1 - 12 + 48 - 64 = -27$$

以及相對極小值 $(1, -27)$.

代 $x = 2$, 得

$$y = 16 - 96 + 192 - 128 = -16$$

以及反曲點 $(2, -16)$.

代 $x = 4$, 得 $y = 256 - 768 + 768 - 256 = 0$ 以及反曲點 $(4, 0)$.

接著, 描出上述求得的重要點, 並分別在 x 軸的上方與下方, 標示出 f' 與 f'' 的符號.

最後，根據 f' 所得的遞增遞減性，以及 f'' 所導出的凹性，逐次地由左至右，在重要點所分割出的子區間上繪出對應的曲線，並連結這些重要點，如下述及圖示。

$(-\infty, 0)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹。

$(0, 1)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹。

$(1, 2)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹。

$(2, 4)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹。

$(4, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹。

因此，得函數 f 的圖形，如圖示。

例 3. 試繪函數

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$$

的圖形。

<解> (i) 求容易得到的 x 截距與 y 截距和水平與垂直漸近線。

y 截距: 代 $x = 0$, 得 $y = -2$, 及 y 截距 $(0, -2)$.

x 截距: 略, 不影響繪圖.

垂直漸近線: $x = 2$, 因為 f 為有理函數, 且代 $x = 2$, 得分母為 0, 以及

$$\text{分子} = 4 - 4 + 4 = 4 \neq 0$$

水平漸近線: 無, 因為當 x 向右無界地延伸時, 經由分子分母同除以 x , 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2 + 4/x}{1 - 2/x} \\ &= \frac{\infty - 2 + 0}{1 - 0} \\ &= \frac{\infty}{1} = \infty\end{aligned}$$

同理, 當 x 向左無界地延伸時, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2 + 4/x}{1 - 2/x} \\ &= \frac{-\infty - 2 + 0}{1 - 0} \\ &= \frac{-\infty}{1} = -\infty\end{aligned}$$

極限均不存在，故無水平漸近線。

註．根據前單元的經驗，亦可以除以最高次方 x^2 ，但在分子的次方大於分母的次方時，同除以分母的次方，會較易處理，如上述。

(ii) 求相對極值．根據分式法則，對 x 微分並化簡，得一階導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+4)(1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

第一類臨界數： $f' = 0$ ，亦相當於分子

$$x(x-4) = 0$$

得

$$x = 0, 4$$

第二類臨界數： f' 未定義的 x 值，無，雖然 $x = 2$ 會使得 f' 的分母等於 0，但臨界數的先決條件是必須在定義

域內，而原函數 f 在 $x = 2$ 未定義，故僅能歸類為非連續點，並且在決定 f' 的符號時，還是需要考慮此種非連續點。

驗證：根據上述求得的一個非連續點及兩個臨界數，得四個子區間以及 f' 在每個子區間的符號，如下述及圖示，其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點。

$$(-\infty, 0): f' = \frac{(-)(-)}{(+)} = (+), \text{遞增}.$$

$$(0, 2): f' = \frac{(+)(-)}{(+)} = (-), \text{遞減}.$$

$$(2, 4): f' = \frac{(+)(-)}{(+)} = (-), \text{遞減}.$$

$$(4, \infty): f' = \frac{(+)(+)}{(+)} = (+), \text{遞增}.$$

故，根據一階導函數檢定法，函數 f 在 $x = 0$ 有相對極大值；在 $x = 4$ 有相對極小值。

(iii) 求反曲點。再根據分式法則，對 x 微分，得二階導函數 $f''(x)$ 的分子為

$$(2x - 4)(x - 2)^2 - (x^2 - 4x)(2)(x - 2)$$

提出公因式 $(x - 2)$, 得

$$(x - 2)[(2x - 4)(x - 2) - 2(x^2 - 4x)]$$

展開上式的中括號並整理, 得

$$2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x = 8$$

因此,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{8(x - 2)}{(x - 2)^4} \\ &= \frac{8}{(x - 2)^3} \end{aligned}$$

接著, 求反曲候選點, 如下述.

第一類: $f'' = 0$, 無, 因為分子為 8, 恆不等於 0.

第二類: f'' 未定義的 x 值, 亦即, 分母

$$(x - 2)^3 = 0$$

得 $x = 2$, 但反曲候選點的先決條件是在定義域內, 而原函數在 $x = 2$ 未定義, 故 $x = 2$ 僅能歸類為非連續點, 而導致無第二類反曲候選點, 但在決定 f'' 的符號時, 還是需要考慮此種非連續點.

由於沒有任何反曲候選點，故函數 f 沒有反曲點。但還是需要決定函數 f 的凹性，以便繪圖，如下述。

根據所得的一個非連續點，得二個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號，如下述及圖示，其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點。

$$(-\infty, 2): f'' = \frac{(+)}{(-)} = (-), \text{ 下凹.}$$

$$(2, \infty): f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+), \text{ 上凹.}$$

(iv) 描點與連結。先求出上述結論中的重要點，如下述。

代 $x = 0$ ，得 $y = -2$ ，以及相對極大值 $(0, -2)$ ，亦是 y 截距。

代 $x = 4$ ，得

$$y = \frac{16 - 8 + 4}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

以及相對極小值 $(4, 6)$ 。

接著，描出上述的重要點，繪出垂直漸近線 $x = 2$ ，以及分別標記 f' 與 f'' 的符號在 x 軸的上方與下方。

最後，根據 f' 所導出的遞增遞減性，以及 f'' 所導出的凹性，逐次地由左至右，在重要點以及垂直漸近線所分割出的子區間上繪出對應的曲線，並連結這些重要點，如下述及圖示。

$(-\infty, 0)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹。

$(0, 2)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹。

$(2, 4)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹。

$(4, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹。

因此，得 f 的圖形，如圖示。

例 4. 試繪函數

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$$

的圖形。

<解> (i) y 截距：代 $x = 0$, 得 $y = \frac{9}{2}$, 以及 y 截距 $(0, \frac{9}{2})$ 。

x 截距: 令 $y = 0$, 解 x , 亦即, 求

$$x^2 - 9 = 0$$

的根, 得 $x = \pm 3$. 故, x 截距為 $(-3, 0)$ 與 $(3, 0)$.

垂直漸近線: $x = \pm 2$, 因為此時分母等於 0, 且分子不等於 0; 亦為非連續點.

水平漸近線: $y = 2$, 因為當 x 向左右無界地延伸時, 經由分子分母同除以 x^2 , 得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2(1 - 9/x^2)}{1 - 4/x^2} \\ &= \frac{2(1 - 0)}{1 - 0} = 2\end{aligned}$$

(ii) 求相對極值. 根據分式法則, 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cdot \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 - 9)(2x)}{(x^2 - 4)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 18x}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}\end{aligned}$$

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦即, 分子

$$20x = 0$$

得

$$x = 0$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 雖然在 $x = \pm 2$ 時, f' 的分母等於 0, 未定義, 但不在 f 的定義域內, 而為非連續點, 亦為產生垂直漸近線的地方, 在決定 f' 的符號時, 還是需要考慮此種非連續點.

驗證: 根據上述求得的一個臨界數及二個非連續點, 得四個子區間以及 f' 在每個子區的符號, 如下述及圖示, 其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點.

$(-\infty, -2): f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(-2, 0): f' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 遞減.

$(0, 2): f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

$(2, \infty): f' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 遞增.

故，根據一階導函數檢定法， f 在 $x = 0$ 有相對極小值。

(iii) 求反曲點。再根據分式法則，對 x 微分並化簡，得二階導函數

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{20(x^2 - 4)^2 - 20x(2)(x^2 - 4)(2x)}{(x^2 - 4)^4} \\ &= \frac{20(x^2 - 4)(x^2 - 4 - 4x^2)}{(x^2 - 4)^4} \\ &= \frac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} \end{aligned}$$

第一類反曲候選點： $f'' = 0$ ，無，因為 f'' 的分子乃恆為負，不等於 0。

第二類反曲候選點： f'' 未定義的 x 值，亦相當於分母

$$(x^2 - 4)^3 = 0$$

得 $x = \pm 2$ ，但不在 f 的定義域內，僅為非連續點。

因此，函數 f 無反曲點。但還是需要決定 f 的凹性，以便繪圖，如下述。

根據所得的二個非連續點，得三個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號，如下述及圖示，其中圖中的空心圓圈表示未定義的非連續點。

$(-\infty, -2): f'' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

$(-2, 2): f'' = \frac{(-)}{(-)} = (+)$, 上凹.

$(2, \infty): f'' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

(iv) 描點與連結. 先求出上述結論中的重要點, 如下述.

代 $x = 0$, 得 $y = \frac{9}{2}$ 以及相對極小值 $(0, \frac{9}{2})$.

代 $x = \pm 3$, 得 $y = 0$ 以及兩個 x 截距 $(-3, 0)$ 與 $(3, 0)$.

接著, 描出上述重要的點, 繪出兩條垂直漸近線 $x = \pm 2$, 一條水平漸近線 $y = 2$, 以及分別標記 f' 與 f'' 的符號在 x 軸的上方與下方.

最後, 根據 f' 所導出的遞增遞減性, 以及 f'' 所導出的凹性, 逐次地由左至右, 在重要點以及垂直漸近線所分割出的子區間上繪出對應的曲線, 並連結這些重要點, 如下述及圖示.

$(-\infty, -3): f' = (-), f'' = (-)$, 遞減且下凹.

$(-3, -2)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹.

$(-2, 0)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹.

$(0, 2)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹.

$(2, 3)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

$(3, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹.

因此, 得 f 的圖形, 如圖示.

例 5. 試繪函數

$$f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$$

的圖形.

<解> (i) y 截距: 代 $x = 0$, 得 $y = 0$. 故, y 截距為 $(0, 0)$.

垂直漸近線: 無, 因為沒有分母.

水平漸近線: 無, 因為首項的次方為 $\frac{5}{3} > 0$.

(ii) 求相對極值. 對 x 微分並化簡, 得一階導函數

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{20}{3}x^{1/3} \\&= \frac{10}{3}x^{1/3}(x^{1/3} - 2)\end{aligned}$$

接著, 求相對極值候選數, 亦即, 臨界數, 如下述.

第一類臨界數: $f' = 0$, 亦相當於

$$x^{1/3}(x^{1/3} - 2) = 0$$

得

$$x = 0, 8$$

第二類臨界數: f' 未定義的 x 值, 無, 因為 f' 恆定義.

驗證: 根據所求得的二個臨界數, 得三個子區間以及 f' 在每個子區間的符號, 如下述及圖示.

$(-\infty, 0)$: $f' = (-)(-) = (+)$, 遞增.

$(0, 8)$: $f' = (+)(-) = (-)$, 遞減.

$(8, \infty)$: $f' = (+)(+) = (+)$, 遞增.

因此，根據一階導函數檢定法， f 在 $x = 0$ 有相對極大值；在 $x = 8$ 有相對極小值。

(iii) 求反曲點．再對 x 微分並化簡，得

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{20}{9}x^{-1/3} - \frac{20}{9}x^{-2/3} \\ &= \frac{20}{9}x^{-2/3}(x^{1/3} - 1) \\ &= \frac{20(x^{1/3} - 1)}{9x^{2/3}} \end{aligned}$$

則 $f'' = 0$ 乃相當於分子的

$$x^{1/3} - 1 = 0$$

得第一類反曲候選點

$$x = 1$$

且 f'' 未定義的 x 值乃相當於分母的

$$x^{2/3} = 0$$

得

$$x = 0$$

在 f 的定義域內，故為第二類反曲候選點。

驗證：根據求得的兩個反曲候選點，得三個子區間以及 f'' 在每個子區間的符號，如下述及圖示。

$(-\infty, 0): f'' = \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

$(0, 1): f'' \frac{(-)}{(+)} = (-)$, 下凹.

$(1, \infty): f'' = \frac{(+)}{(+)} = (+)$, 上凹.

因爲在 $x = 0$ 附近的凹性未改變, 故在 $x = 0$ 沒有反曲點; 而在 $x = 1$ 附近的凹性改變, 故在 $x = 1$ 有一個反曲點.

(iv) 描點與連結. 先求出上述結論中的重要點, 如下述.

代 $x = 0$, 得 $y = 0$ 以及相對極大值 $(0, 0)$.

代 $x = 8$, 得

$$y = 2(32) - 5(16) = 64 - 80 = -16$$

以及相對極小值 $(8, -16)$.

代 $x = 1$, 得

$$y = 2 - 5 = -3$$

以及反曲點 $(1, -3)$.

接著，描出上述重要的點，並分別標記 f' 與 f'' 的符號在 x 軸的上方與下方。

最後，根據 f' 所導出的遞增遞減性，以及 f'' 所導出的凹性，逐次地由左至右，在重要點所分割出的子區間上繪出對應的曲線，並連結這些重要點，如下述及圖示。

$(-\infty, 0)$: $f' = (+)$, $f'' = (-)$, 遞增且下凹。

$(0, 1)$: $f' = (-)$, $f'' = (-)$, 遞減且下凹。

$(1, 8)$: $f' = (-)$, $f'' = (+)$, 遞減且上凹。

$(8, \infty)$: $f' = (+)$, $f'' = (+)$, 遞增且上凹。

因此，得 f 的圖形，如圖示。