

單元 35: 定積分與和的極限

(課本 §5.6)

問. 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的值爲多少?

(1) 當被積函數 $f(x)$ 的反導函數 (或不定積分) $F(x)$, 亦即,

$$F'(x) = f(x)$$

可求得時, 由微積分基本定理知,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

(2) 若 $f(x)$ 的反導函數 $F(x)$ 不易求得時, 如何計算定積分的值?

可採用中點法則 (midpoint point rule) 近似法, 估計定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的值, 如下述.

(1) 將閉區間 $[a, b]$ n 等分, 得每一子區間的寬度

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

(2) 求每一子區間的中點, 得

$$\text{中點: } x_1, \dots, x_n$$

(3) 以 n 個高分別為 $f(x_i)$ 且寬為 Δx 的長方條面積和近似定積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

亦即,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \Delta x f(x_1) + \cdots + \Delta x f(x_n) \\ &= \frac{b - a}{n} [f(x_1) + \cdots + f(x_n)] \end{aligned}$$

為何如此? (1) 圖示: 僅考慮函數 f 為非負的特例. 將閉區間 $[a, b]$ n 等分, 並以每個子區間中點的 f 值為高, 形成 n 個長方條, 如圖示.

因此, 由定積分的面積觀點, f 所圍成區域的面積近似於 n 個長方條的面積和, 亦即,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

且當分的愈細時, 亦即, 子區間數 n 愈大時, 估計愈準確, 得證.

(2) 事實: 若函數 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續, 則定積分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

其中對於 $i = 1, \dots, n$, x_i 為第 i 個子區間中的任一點, 不一定為中點, 當然取 x_i 為中點, 一定成立, 並稱等號右邊極限內的和為黎曼和 (Riemann sum), 亦即, 定積分為黎曼和的極限.

因此, 由此事實知,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

得證.

例 1. 令 R 為

$$y = -x^2 + 5$$

在 $[0, 2]$ 上所圍出的區域. 試以 $n = 5$ 的中點法則估計 R 的面積, 並與真正的面積比較.

<解> 首先, 將區間 $[0, 2]$ 5 等分, 得子區間的寬

$$\Delta x = \frac{2 - 0}{5} = \frac{2}{5}$$

以及 5 個子區間, 如圖示.

接著, 由圖示, 得

$$\text{中點: } \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}$$

最後, 根據非負函數定積分的面積觀點, 以及中點法則, 得

$$\begin{aligned} R \text{ 的面積} &= \int_0^2 (-x^2 + 5) dx \\ &\approx \frac{2}{5} \left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f(1) + \right. \\ &\quad \left. f\left(\frac{7}{5}\right) + f\left(\frac{9}{5}\right) \right] \\ &= \frac{2}{5} \left\{ \left[-\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 5 \right] + \left[-\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5 \right] \right. \\ &\quad \left. + [- (1)^2 + 5] + \left[-\left(\frac{7}{5}\right)^2 + 5 \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[-\left(\frac{9}{5}\right)^2 + 5 \right] \right\} = \frac{920}{125} = 7.36 \end{aligned}$$

而根據微積分基本定理,

$$\begin{aligned}\text{真正的面積} &= \int_0^2 (-x^2 + 5)dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 5x \Big|_0^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 10 = \frac{22}{3} \\ &\approx 7.33\end{aligned}$$

與估計值 7.36 相近.

例 2. 試以 $n = 10$ 的中點法則估計

$$\int_1^3 \sqrt{x^2 + 1}dx$$

<解> 這是一個至目前所學, 無法以微積分基本定理求出真正值的定積分, 因為需先以反三角函數的積分法求出不定積分, 再根據微積分基本定理求出定積分的值, 而超出本書範圍, 故需以中點法則估計.

首先, 10 等分 $[1, 3]$, 得子區間的寬

$$\Delta x = \frac{3 - 1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

以及 10 個子區間, 如圖示.

接著，由圖示，得

$$\text{中點: } 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}, \frac{13}{10}, \frac{15}{10}, \dots, \frac{27}{10}, \frac{29}{10}$$

最後，根據中點法則，得

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \sqrt{x^2 + 1} dx \\ & \approx \frac{1}{5} \left[f\left(\frac{11}{10}\right) + f\left(\frac{13}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{29}{10}\right) \right] \\ & = \frac{1}{5} \left[\sqrt{(1.1)^2 + 1} + \sqrt{(1.3)^2 + 1} + \dots + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \sqrt{(2.9)^2 + 1} \right] \\ & \approx 4.504 \end{aligned}$$