

單元 3：方程式的圖形

(課本 §1.2)

一．方程式的圖形 (Graph of Equation)

方程式的圖形 = {所有滿足此方程式的點}

例如，滿足方程式

$$y = 7 - 3x$$

的點 (有序對) 如下表

x	0	1	2	...
y	7	4	1	...

連結這些點，得圖形爲一直線，如圖示.

滿足方程式

$$y = x^2 - 2$$

的點如下表

x	0	1	-1	...
y	-2	-1	-1	...

連結這些點，得圖形爲一開口向上的拋物線，如圖示.

二. 截距 (Intercept)

一圖形的 y -截距乃圖形與 y -軸的交點; x -截距乃圖形與 x -軸的交點. 如圖示,

第一圖只有一個 y -截距, 沒有 x -截距;

第二圖有三個 x -截距, 一個 y -截距;

第三圖有一個 x -截距, 二個 y -截距;

第四圖無任何截距.

三. 求截距的方法

因為 x -截距在 x -軸上, 故 $y = 0$, 且

求 x -截距

相當於

令 $y = 0$, 解 x

同理, 因為 y -截距在 y -軸上, 故 $x = 0$, 且

求 y -截距

相當於

令 $x = 0$, 解 y

例如, 求

$$y = x^3 - 4x$$

的所有截距的過程如下.

x -截距: 令 $y = 0$, 解 x , 得

$$0 = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$$

由此得

$$x = -2, 0, 2$$

因此, x -截距為

$$(-2, 0), (0, 0), (2, 0)$$

y -截距: 令 $x = 0$, 解 y , 得

$$y = 0$$

故, y -截距為

$$(0, 0)$$

如圖示.

四. 圓 (Circle)

圓心 (center) 爲 (h, k) , 半徑 (radius) 爲 r 的圓的標準式 (standard form) 爲

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

如圖示. 圓的一般式 (general form) 爲

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

可經由 "配方法" (completing the square), 而得出圓的標準式 (易繪圖的方程式), 例如, 試繪

$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0$$

的圖形.

<解> 兩邊同除 4, 得

$$x^2 + y^2 + 5x - 4y = -\frac{37}{4}$$

經由配方法, 得

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 4y + 4 = -\frac{37}{4} + \frac{25}{4} + 4$$

亦相當於

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

所以, 得一以 $(-\frac{5}{2}, 2)$ 爲圓心, 半徑爲 1 的圓, 如圖示.

五. 交點 (Point of Intersection)

同時滿足二方程式的共同點稱爲交點. 例如, 試求

$$y = x^2 - 3 \text{ 與 } y = x - 1$$

的交點.

<解> 因爲是共同點, 故可令二個 y 值相等, 得

$$x^2 - 3 = x - 1$$

接著, 解 x , 得

$$x^2 - x - 2 = 0$$

經由因式分解, 上式相當於

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

故

$$x = -1 \text{ 或 } 2$$

由 $x = -1$, 得

$$y = (-1)^2 - 3 = -2$$

由 $x = 2$, 得

$$y = 2 - 1 = 1$$

因此, 二交點為

$$(-1, -2) \text{ 與 } (2, 1)$$

例 1. 損益平衡點 (Break-Even Point). 設某產品的製造成本為每單位 \$0.65, 且售價為每單位 \$1.20. 又此公司的最初投資額為 \$10,000. 試問需銷售多少單位的產品才可達損益平衡點?

<解> 設 x 為銷售量, 則根據題意, 總成本 (total cost)

$$C = 10000 + 0.65x$$

且總收益 (total revenue)

$$R = 1.20x$$

又損益平衡點為總成本與總收益相等的產量 x 以及所對應的成本或收益, 亦即, 滿足

$$C = R$$

的 x , 亦相當於解

$$10000 + 0.65x = 1.2x$$

整理後，得

$$10000 = 0.55x$$

故，當產量

$$x = \frac{10000}{0.55} \approx 18182$$

時，可達損益平衡點，如圖示。

數學模型 (Mathematical Model).

處理實際問題（如，預測，分析）時，經常根據已有的資料 (data) 建構出一數學模型（常以方程式的型式出現），而在此模型下，運用知識，獲致所要的結果。

在建構數學模型時，常面臨的兩難為：準確性 (accuracy) 與簡單性 (simplicity)，如何拿捏，就相當於不同的建構方法，是需要根據不同因素而調整的，這就是專業及挑戰的部分。

例 2. 數學模型. Dell 電腦 (Dell Computers) 及 Sun 微處理系統 (Sun Microsystem) 從 1992 年到 1996 年的年銷售額 (annual sales), (單位: 百萬元), 如下表:

年	1992	1993	1994	1995	1996
t	2	3	4	5	6
Dell	2014	2873	3475	5296	7759
Sun	3589	4309	4690	5902	7095

其中的 t 值為以 1990 為基準而平移後的數值, 亦即, 1990 年相當於 $t = 0$, 1991 年相當於 $t = 1$, 1992 年相當於 $t = 2$, 以此類推.

在 1997 年的夏天, Value Line 公司預測 1998 年此二家公司的年銷售額分別為

Dell 電腦 \$15,000

以及

Sun 微處理系統 \$10,350

試問你對此二預測的看法如何?

<解> 此乃一根據過去資料預測未來銷售額的問題. 可建構一可靠的模型, 然後與 Value Line 的推測相比較. 設根據一種稱為 "最小平方迴歸分析" (least squares regression analysis) 的統計方法, 得 Dell 電腦的年銷售額

$$R_D = 316t^2 - 1138t + 3145, \quad 2 \leq t \leq 6$$

且 Sun 微處理系統的年銷售額

$$R_S = 127t^2 - 155t + 3452, \quad 2 \leq t \leq 6$$

則在 1998 年, 亦即, $t = 8$ 時, Dell 電腦的年銷售額為

$$R_D(8) = 316(8)^2 - 1138(8) + 3145 = 14265$$

且 Sun 微處理系統的年銷售額為

$$R_S(8) = 127(8)^2 - 155(8) + 3452 = 10340$$

因此, 建構出的模型的預測值與 Value Line 的預測值相當接近.