

單元 40: 積分表與配方法

(課本 §6.4)

根據被積函數的型式, 積分表分成下述的八類,

- (1) 含 u^n , 公式 1-2.
- (2) 含 $a + bu$, 公式 3-13.
- (3) 含 $\sqrt{a + bu}$, 公式 14-20.
- (4) 含 $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a > 0$, 公式 21-28.
- (5) 含 $u^2 - a^2$, $a > 0$, 公式 29-30.
- (6) 含 $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, 公式 31-33.
- (7) 含 e^u , 公式 34-38.

(8) 含 $\ln u$, 公式 39-43.

使用積分表的方法為

(1) 直接使用合適的公式, 如例 1.

(2) 以代入法轉換成合適的公式, 如例 2 與例 3.

例 1. 試求

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$$

<解> 因為被積函數中含有 $\sqrt{x-1}$, 此乃一次式的方根類, 故根據積分表可搜尋 $\sqrt{a+bu}$ 的類型, 得公式 19:

$$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = -\frac{2(2a-bu)}{3b^2} \sqrt{a+bu} + C$$

與原式的被積函數有完全相同的型式, 亦即分子為積分變數, 且分母為積分變數的一次式的方根. 故經由適當的選取常數, 則可直接使用此公式, 亦即, 令

$$a = -1, b = 1, u = x$$

由公式 19, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} &= -\frac{2[2(-1) - (1)x]}{3(1)^2} \sqrt{-1+x} + C \\ &= \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1} + C\end{aligned}$$

例 2. 試求

$$\int x\sqrt{x^4-9}dx$$

<解> 被積函數內含有一四次式的方根, 雖然積分表沒有此種四次式的方根的公式, 但 $\sqrt{x^4-9}$ 與 $\sqrt{u^2-a^2}$ 類似, 故可先嘗試以

$$u = x^2, \quad du = 2x dx$$

的代入法作型式的轉換, 得

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u^2-9} du \quad (1)$$

爲一二次式的方根類, 故根據積分表搜尋 $\sqrt{u^2-a^2}$ 的類型, 得公式 21:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du \\ = \frac{1}{2} \left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + C\end{aligned}$$

在取 " − " 號下, 與 (1) 式的被積函數有完全相同的型式.

因此, 令 $a = 3$ 並取 " − " 號下, 由 (1) 式與公式 21, 得

$$\begin{aligned} & \text{原式} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(u\sqrt{u^2 - 9} - 9 \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 9} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{4} \left(x^2\sqrt{x^4 - 9} - 9 \ln \left| x^2 + \sqrt{x^4 - 9} \right| \right) + C \end{aligned}$$

其中第二個等號乃是將 $u = x^2$ 反代入, 以原式的積分變數 x 表示所致.

例 3. 試求

$$\int_0^2 \frac{x}{1 + e^{-x^2}} dx$$

<解> 這是一個定積分, 故根據微積分基本定理, 需先求出不定積分, 再計算出此定積分的值. 首先, 這是一個含有指數函數的被積函數, 但積分表中此類公式的指數函數的指數部份僅為積分變數, 而不像此例中的積分變數的函數 $-x^2$, 故需經由選取

$$u = -x^2; \quad du = -2x dx$$

的代入法作型式的轉換, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+e^{-x^2}} (-2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+e^u} du\end{aligned}\quad (2)$$

接著, 經由查表, 得公式 37:

$$\int \frac{1}{1+e^u} du = u - \ln(1+e^u) + C$$

與 (2) 式中的被積函數有完全相同的型式.

因此, 根據 (2) 式與公式 37, 並將 $u = -x^2$ 反代入且整理, 得

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} [u - \ln(1+e^u)] + C \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 + \ln(1+e^{-x^2}) \right] + C\end{aligned}$$

最後, 根據微積分基本定理,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \left[x^2 + \ln(1+e^{-x^2}) \right] \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2} [4 + \ln(1+e^{-4})] - \frac{1}{2} [0 + \ln(1+1)] \\ &= 2 + \frac{1}{2} \ln(1+e^{-4}) - \frac{1}{2} \ln 2\end{aligned}$$

(3) 以配方法 (completing the square) 轉換成合適的公式, 如例 4.

例 4 試求

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 1} dx$$

<解> 被積函數中含有一個二次式, 但卻有一次項, 不像積分表中二次式的類型 $u^2 - a^2$, 不含一次項. 一個處理的方式是, 經由配方法將此一次項整理成一個一次式的平方, 再根據適當的代入法轉換成合適的公式.

首先, 將 $x^2 - 4x + 1$ 配方, 得

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 \\ &= (x - 2)^2 - 3 \\ &= (x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

接著, 經由選取

$$u = x - 2; \quad du = dx$$

的代入法作型式的轉換, 得

$$\text{原式} = \int \frac{1}{u^2 - (\sqrt{3})^2} du \quad (3)$$

最後，搜尋積分表中含 $u^2 - a^2$ 的類型，得公式 29:

$$\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$$

與 (3) 式中的被積函數有完全相同的型式.

因此，令 $a = \sqrt{3}$ ，並根據 (3) 式與公式 29，以及反代入 $u = x - 2$ ，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - 2 - \sqrt{3}}{x - 2 + \sqrt{3}} \right| + C \end{aligned}$$

(4) 縮減公式 (reduction formulas)

$$\int f(x) dx = g(x) + \int h(x) dx$$

乃是將原式表成一個明確的函數 $g(x)$ 與另一個較易處理的不定積分 $\int h(x) dx$ 的和，經由一次或多次的套用同一個縮減公式或其他適當的公式，可得出原式的積分，在型式與概念上與分部積分類似，如例 5.

例 5. 試求

$$\int x^2 e^x dx$$

<解一> 分部積分，因為被積函數為一多項式與指數函數的乘積。請根據過去的經驗，自行嘗試。

<解二> 根據積分表中含指數函數的類型，得公式 36:

$$\int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$$

與原式的被積函數有完全相同的型式。故根據原式與公式 36，取

$$n = 2; u = x$$

得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^2 e^x - 2 \int x^{2-1} e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \end{aligned} \quad (4)$$

其中等號右邊為一在型式上比原式較易積分的式子。

接著，可再度在取 $n = 1$ 下，套用公式 36，將 x 的次方再度縮減 1，直至 0 次方，而不含 x 項，僅有指數函數，並根據指數函數的積分公式求出積分，請自行嘗試。

或根據積分表，得公式 35:

$$\int u e^u du = (u - 1)e^u + C$$

與 (4) 式等號右邊的被積函數有完全相同的型式。

因此, 取 $u = x$, 並由 (4) 式與公式 35, 得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x^2 e^x - 2[(x - 1)e^x] + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C\end{aligned}$$