

單元 43: 三維坐標系統

(課本 §7.1)

一. 空間的分割

空間可由三個相互垂直的直線，稱作坐標軸，它們分別為 x -軸， y -軸，與 z -軸，所構成及描述其中任何一點的相對位置 (x, y, z) ，如圖示。

三個坐標平面： xy -平面， yz -平面，與 xz -平面，可將空間分割成八個卦限 (octant)，分別為

第一卦限 ($x > 0, y > 0, z > 0$)

第二卦限 ($x < 0, y > 0, z > 0$)

⋮

第五卦限 ($x > 0, y > 0, z < 0$)

⋮

第八卦限 ($x > 0, y < 0, z < 0$)

亦即，在上半空間，逆時針方向依序對應出前四個卦限，以及在下半空間，逆時針方向依序對應出後四個卦限，如圖示。

二. 距離公式

二點 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 之間的距離

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

三. 中點公式

二點 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 所連成線段的中點 (midpoint) 爲

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

如圖示.

四. 球面方程式

以 (h, k, l) 爲球心, r 爲半徑的球面爲

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

稱作球面的標準式.

例 1. 試求球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$$

的球心與半徑.

<解> 將常數項 -8 移至等號右邊, 並以配方法得球面方程式為

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\= -8 + 1 + 4 + 9\end{aligned}$$

由此導出球面的標準式

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

故, 半徑為 $\sqrt{6}$, 且球心為 $(1, -2, 3)$.

五. 空間曲面 (surface in space)

空間曲面為滿足 x, y, z 方程式的點集合, 如

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

為一空間曲面, 又可更具體地稱其為以 (h, k, l) 為球心, 半徑為 r 的球面.

六. 曲面截線 (trace of surface)

曲面截線為曲面與空間中的平面的交集, 如 xy -曲面截線為曲面與 xy -平面的交集, yz -曲面截線為曲面與 yz -平面的交集, xz -曲面截線為曲面與 xz -平面的交集.

空間中的曲面在視覺上不易整體地體會出，或繪出，但可透過曲面截線得出在二維坐標系統中的部份，並經由較熟悉的平面中的繪圖經驗而體會並描繪出，繼而對整體的曲面有較具體的認識。

例 2. 試求球面

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25$$

的 xy -曲面截線。

<解> 根據上述曲面截線的定義，原問題乃相當於求球面與 xy -平面的交集。又 xy -平面就是 $z = 0$ ，故 xy -曲面截線為方程組

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$$

亦相當於將 $z = 0$ 代入球面方程式，得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (0 + 4)^2 = 25$$

經由整理，得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

乃一熟悉的，在 xy -平面上的平面方程式。

因此，球面的 xy -曲面截線為一個以 $(3, 2)$ 為圓心，半徑為 3 的圓。

另代 $z = -1$ ，得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

乃一在平面 $z = -1$ 上的圓，其圓心為 $(3, 2, -1)$ ，半徑為 4，亦可將此曲面截線投影在 xy -平面上，得出同樣大小的圓。

若代 $z = 1$ ，得

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

僅 $(3, 2)$ 滿足，表示在平面 $z = 1$ 上，曲面截線退化為一個點 $(3, 2, 1)$ ，它在 xy -平面上的投影就是點 $(3, 2)$ 。

亦可嘗試代其它的 z 值，得出對應的，與 xy -平面平行的曲面截線，但當 $z > 1$ 或 $z < -9$ 時，不會產生曲面截線，因為此時的交集為空集合。