

單元 47: 雙變數函數的極值

(課本 §7.5)

定義. 設雙變數函數 $f(x, y)$ 定義在一含 (x_0, y_0) 的區域上, 則

- (1) $f(x_0, y_0)$ 是一相對最大值, 若且唯若存在一個以 (x_0, y_0) 為圓心的圓碟 R , 使得對所有 R 中的 (x, y) ,

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

亦即, 針對在 R 上的 $f(x, y)$ 的圖形而言, 點 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 是最高點, 如圖示.

- (2) $f(x_0, y_0)$ 是一相對最小值, 若且為若存在一以 (x_0, y_0) 為圓心的圓碟 R , 使得對所有 R 中的 (x, y) ,

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

亦即, 針對在 R 上的 $f(x, y)$ 的圖形而言, 點 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 是最低點, 如圖示.

- (3) 相對最大值或相對最小值統稱為相對極值.

問. 如何找相對最大值以及相對最小值?

答. 基本上, 有兩種方法, 分別爲一階偏導函數檢定法與二階偏導函數檢定法, 如下述.

一. 一階偏導函數檢定法

若 $f(x_0, y_0)$ 是一相對極值且 f 的一階偏導函數存在, 則

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

且

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

爲何如此? 若 $f(x_0, y_0)$ 爲一相對極值, 則分別在 x -方向與 y -方向時, $f(x_0, y_0)$ 亦是相對極值, 故, 根據單變數函數的相對極值定理, 在 x -方向的斜率

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

且在 y -方向的斜率

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

如圖示.

也就是說，一階偏導函數檢定法提供一個在一階偏導函數存在時，產生相對極值的必要條件。故，類似於單變數函數的情形，首先定義滿足此必要條件的點以及一階導函數不存在的點，如下述。

定義．若點 (x_0, y_0) 滿足

(i) $f_x(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_y(x_0, y_0) = 0$, 或

(ii) $f_x(x_0, y_0)$ 或 $f_y(x_0, y_0)$ 未定義

則稱 (x_0, y_0) 爲 f 的臨界點 (critical point), 其中滿足 (i) 的稱爲第一類臨界點, 滿足 (ii) 的稱爲第二類臨界點。

接著，根據一階導函數檢定法，若 $f(x_0, y_0)$ 是一相對極值，則 (x_0, y_0) 一定是一臨界點，亦即，相對極值只可能發生在臨界點上。因此，只需在臨界點上找相對極值即可。

例 1. 試求

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$$

的相對極值.

<解> (1) 找臨界點. 首先, 一階偏導函數為

$$f_x(x, y) = 4x + 8$$

且

$$f_y(x, y) = 2y - 6$$

均有定義, 故無第二類臨界點. 又由

$$f_x(x, y) = 4x + 8 = 0$$

得

$$x = -2$$

且由

$$f_y(x, y) = 2y - 6 = 0$$

得

$$y = 3$$

故得第一類臨界點

$$(-2, 3)$$

(2) 如何判斷? 因為臨界點僅為可能產生相對極值的候選點, 故需判斷在此點是否有相對極值, 以及是何種相對極值.

經由配方法, 得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6x + 9) \\ &\quad + 20 - 8 - 9 \\ &= 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 \end{aligned}$$

其中等號右邊的前兩項為非負的和, 故 $f(x, y)$ 的值為大於或等於 3.

因此, 在點 $(-2, 3)$ 有相對最小值 $f(-2, 3) = 3$.

例 2. 試求

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$$

的相對極值.

<解> (1) 找臨界點. 首先, 一階偏導函數為

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= -\frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{-2/3}(2x) \\ &= \frac{-2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= -\frac{1}{3}(x^2 + y^2)^{-2/3}(2y) \\ &= \frac{-2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \end{aligned}$$

由於分母

$$3(x^2 + y^2)^{2/3} = 0$$

乃相當於

$$x = 0, y = 0$$

故, $f_x(x, y)$ 與 $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 均未定義, 得第二類臨界點

$$(0, 0)$$

無第一類臨界點, 因為由

$$f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$$

得

$$x = 0, y = 0$$

但在此點 $(0, 0)$ 時, f_x 與 f_y 均未定義, 故需歸類為第二類臨界點, 如上述.

(2) 如何判斷? 因為

$$(x^2 + y^2)^{1/3} \geq 0$$

故

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} \leq 1$$

因此,

$$f(0, 0) = 1$$

是一相對最大值.

二. 二階偏導函數檢定法

令 $f(x, y)$ 的一階偏導函數均連續, 且點 (a, b) 滿足

$$f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$$

亦即, 點 (a, b) 為第一類臨界點. 定義判別式

$$d(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

得

- (1) 若 $d > 0$ 且 $f_{xx}(a, b) > 0$ (亦即, 圖形上凹), 則 $f(a, b)$ 是一相對最小值.
- (2) 若 $d > 0$ 且 $f_{xx}(a, b) < 0$ (亦即, 圖形下凹), 則 $f(a, b)$ 是一相對最大值.
- (3) 若 $d < 0$, 則 $(a, b, f(a, b))$ 為一鞍點 (saddle point), 亦即, $f(a, b)$ 既不是相對最大值也不是相對最小值.

(4) 若 $d = 0$, 則此檢定法失效, 亦即, 無法判斷是否有相對極值.

舉例說明, 為何 $d < 0$ 時會得一鞍點? 令函數

$$z = f(x, y) = -x^2 + y^2$$

則根據二次曲面的分類, 爲一雙曲拋物面, 且在 $(0, 0, 0)$ 時, 不是最大值也不是最小值, 乃一鞍點, 如圖示.

接著, 說明在 $(0, 0)$ 時, 判別式 $d < 0$, 而與二階導函數檢定法一致. 首先, 解方程組

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -2x = 0 \\ f_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得第一類臨界點 $(0, 0)$.

又

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[-2x] = -2$$

且

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[2y] = 2$$

以及

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}[-2x] = 0$$

故, 在 $(0, 0)$ 的判別式

$$\begin{aligned}d(0, 0) &= f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 \\&= (-2)(2) - (0)^2 = -4\end{aligned}$$

乃一小於 0 的數, 與二階導函數檢定法一致.

例 3. 試求

$$f(x, y) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$$

的相對極值與鞍點.

<解> (1) 求臨界點, 亦即, 相對極值候選點. 根據第一類臨界點的定義, 需解

$$f_x(x, y) = y - x^3 = 0 \quad (1)$$

以及

$$f_y(x, y) = x - y^3 = 0 \quad (2)$$

首先, 由 (1) 式, 得

$$y = x^3$$

接著, 將上式代入 (2) 式, 得

$$x - (x^3)^3 = x(1 - x^8) = 0$$

故,

$$x = -1, 0, 1$$

因此, 根據關係式 $y = x^3$, 第一類臨界點為

$$(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$$

無第二類臨界點, 因為一階偏導函數均有定義.

(2) 判斷. 因為都是屬於第一類臨界點, 故可由二階偏導函數檢定, 過程如下. 首先, 二階偏導函數為

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [y - x^3] = -3x^2$$

且

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [x - y^3] = -3y^2$$

以及

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [y - x^3] = 1$$

故, 根據定義, 得判別式

$$d(x, y) = (-3x^2)(-3y^2) - (1)^2 = 9x^2y^2 - 1$$

接著, 以二階偏導函數檢定每一個第一類臨界點, 如下述.

在臨界點 $(1, 1)$ 時, 判別式

$$d(1, 1) = 9(1)^2(1)^2 - 1 = 8 > 0$$

表示有相對極值, 且

$$f_{xx}(1, 1) = -3(1)^2 = -3 < 0$$

表示圖形下凹, 故得

$$f(1, 1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

爲一相對最大值.

在臨界點 $(-1, -1)$ 時, 判別式

$$d(-1, -1) = 9(-1)^2(-1)^2 - 1 = 8 > 0$$

表示有相對極值, 且

$$f_{xx}(-1, -1) = -3(-1)^2 = -3 < 0$$

表示圖形下凹, 故得

$$f(-1, -1) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

爲另一個相對最大值.

在臨界點 $(0, 0)$ 時, 判別式

$$d(0, 0) = 9(0)^2(0)^2 - 1 = -1 < 0$$

故無相對極值，得

$$(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$$

爲一鞍點.

例 4. 設二種替代型產品的需求函數分別爲

$$x_1 = 200(p_2 - p_1)$$

以及

$$x_2 = 500 + 100p_1 - 180p_2$$

又製造產品 1 的成本爲 \$0.5 (元/單位), 且產品 2 的成本爲 \$0.75 (元/單位). 試求可獲致最大利潤的售價.

<解> 根據題意, 原問題乃相當於最大化利潤

$$P = R - C$$

其中 R 爲收益, C 爲成本.

又收益

$$\begin{aligned} R &= x_1 p_1 + x_2 p_2 \\ &= 200(p_2 - p_1)p_1 + \\ &\quad (500 + 100p_1 - 180p_2)p_2 \\ &= -200p_1^2 - 180p_2^2 + 300p_1p_2 + 500p_2 \end{aligned}$$

且成本

$$\begin{aligned}C &= 0.5x_1 + 0.75x_2 \\&= 0.5 \cdot 200(p_2 - p_1) + \\&\quad 0.75 \cdot (500 + 100p_1 - 180p_2) \\&= 375 - 25p_1 - 35p_2\end{aligned}$$

所以，將上述求得的 R 與 C 代入，得利潤

$$\begin{aligned}P &= R - C \\&= -200p_1^2 - 180p_2^2 + 300p_1p_2 + \\&\quad 25p_1 + 535p_2 - 375\end{aligned}$$

接著，找臨界點。根據第一類臨界點的定義，乃相當於解方程組

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} = -400p_1 + 300p_2 + 25 = 0 \quad (3)$$

以及

$$\frac{\partial P}{\partial p_2} = 300p_1 - 360p_2 + 535 = 0 \quad (4)$$

將 (3) 式乘以 3，得

$$-1200p_1 + 900p_2 + 75 = 0$$

將 (4) 式乘以 4, 得

$$1200p_1 - 1440p_2 + 2140 = 0$$

再將上二式相加, 可消去 p_1 , 並得

$$-540p_2 + 2215 = 0$$

經移項整理, 得

$$p_2 = \frac{2215}{540} = \frac{443}{108}$$

將 p_2 代入 (3) 式, 並化簡, 得

$$p_1 = \frac{1}{400} \left[300 \left(\frac{443}{108} \right) + 25 \right] = \frac{113}{36}$$

故, 第一類臨界點為

$$\left(\frac{113}{36}, \frac{443}{108} \right)$$

無第二類臨界點, 因為一階偏導函數均有定義.

最後, 判斷在臨界點是否會產生最大利潤. 首先, 二階偏導函數為

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2} = \frac{\partial}{\partial p_1} [-400p_1 + 300p_2 + 25] = -400$$

且

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_2^2} = \frac{\partial}{\partial p_2} [300p_1 - 360p_2 + 535] = -360$$

以及

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1 \partial p_2} = \frac{\partial}{\partial p_1} [300p_1 - 360p_2 + 535] = 300$$

故, 判別式

$$d(p_1, p_2) = (-400)(-360) - (300)^2 > 0$$

乃一常數, 且恆大於 0, 表示在臨界點有相對極值. 又二階偏導函數

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p_1^2}(p_1, p_2) = -400 < 0$$

乃一常數, 且恆小於 0, 表示圖形下凹. 因此, 在代入臨界點後, 也有相同的結果, 故當

$$p_1 = \frac{113}{36}$$

且

$$p_2 = \frac{443}{108}$$

時, 有最大利潤

$$P\left(\frac{113}{36}, \frac{443}{108}\right)$$