

單元 9: 一些微分的法則

(課本 §2.2)

(1) 常數法則 (constant rule). 設 c 為一常數, 則

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

亦即, 常數函數的導函數恆為 0. 為何如此? 令

$$f(x) = c$$

則其圖形為一水平線, 如圖示, 得切線就是此水平線, 故

$$f'(x) = \text{切線斜率} = 0$$

或由定義,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

其中最後一個等號成立乃因為常數 0 的極限就是常數 0, 它自己.

(2) 幕次法則 (power rule). 設 n 為任一實數, 則

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

為何如此？僅說明 n 為正整數的情形，其它任意的 n 亦成立，但省略說明。令 n 為一正整數，且

$$f(x) = x^n$$

根據定義，導函數

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1)$$

又，根據二項展開式，

$$\begin{aligned} (x + \Delta x)^n - x^n &= x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 \\ &\quad + \cdots + (\Delta x)^n - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 \\ &\quad + \cdots + (\Delta x)^n \end{aligned}$$

代入 (1) 式並消去分子，分母中的共同因式 Δx ，得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

其中第二個等號成立乃因為第一項對 Δx 而言為一個常數，之後的每一項都含有因式 Δx ，故當 $\Delta \rightarrow 0$ 時，得出常數的極限就是常數本身，而其它各項在乘上了極限 0 以後，均變成了 0.

(3) 常數乘積法則 (constant multiple rule). 設 c 為一常數且 f 為可微，則

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$$

亦即，可提出常數.

(4) 和差法則 (sum and difference rule). 設 f 與 g 均可微，則

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

亦即，可逐項微分.

例 1. 試求下列各函數的導函數.

$$(a) \quad g(t) = \frac{4t^{1/2}}{5}$$

$$(b) \quad y = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(c) \ y = \frac{5}{(2x)^3}$$

$$(d) \ f(x) = 2\pi + \sqrt{2x} + (5x)^2 + 3x^{5/2}$$

<解> 解題技巧：將各項均改寫成 cx^n 的型式後，再根據上述的法則微分。

(a) 首先， $g(t)$ 可改寫成

$$g(t) = \frac{4}{5}t^{1/2}$$

故根據常數乘積法則以及冪次法則，

$$g'(t) = \frac{4}{5} \frac{d}{dt} [t^{1/2}] = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2} \right) t^{1/2-1} = \frac{2}{5} t^{-1/2}$$

(b) 經由改寫，得

$$y = \frac{1}{2}x^{-2/3}$$

故根據常數乘積法則及冪次法則，

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x^{-2/3}] \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-2/3-1} = -\frac{1}{3} x^{-5/3} \end{aligned}$$

(c) 改寫後, 得

$$y = \frac{5}{8}x^{-3}$$

故根據常數乘積法則及冪次法則,

$$y' = \frac{5}{8}(-3)x^{-4} = -\frac{15}{8}x^{-4}$$

(d) 經由改寫, 得

$$f(x) = 2\pi + \sqrt{2}x^{1/2} + 25x^2 + 3x^{5/2}$$

故, 首先根據和差法則在逐項微分下, 再根據其它三個法則, 得

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \right) x^{1/2-1} + 25(2)x^{2-1} \\ &\quad + 3 \left(\frac{5}{2} \right) x^{5/2-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}x^{-1/2} + 50x + \frac{15}{2}x^{3/2} \end{aligned}$$

例 2. 試求

$$g(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}}$$

的導函數.

<解> 即使以後學了有關分式的微分法則後，在分母只有單一一項的情況下，利用分配律將每項改寫成 cx^n 的型式後，會簡化許多求導函數的過程。故，首先根據分配律，可將 $g(x)$ 改寫成

$$g(x) = 2x^{3/2} - 3x^{1/2} + 5x^{-1/2}$$

接著，根據上述的微分法則，在逐項微分下，得

$$g'(x) = 3x^{1/2} - \frac{3}{2}x^{-1/2} - \frac{5}{2}x^{-3/2}$$

例 3. 試求

$$h(x) = (x - 1)(x^2 + \sqrt{x} - 2)$$

的導函數。

<解> 在還未學習有關乘積的微分法則下，一個可行的方法是將原函數展開並將每一項寫成 cx^n 的型式，特別是在容易乘開的情況下，此方法比直接使用乘積法則求導函數要來得簡潔。故展開得

$$h(x) = x^3 - x^2 + x^{3/2} - x^{1/2} - 2x + 2$$

因此，

$$h'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2$$