

## 單元 28: 指數函數的數學模型

### (課本 §5.6)

許多真實世界的問題可用指數函數或與指數函數相關的函數以數學模型的方式描述. 本單元探討生命與社會科學領域中與指數函數相關的應用.

#### 一. 指數成長 (exponential growth)

設某個隨時間  $t$  演變的量

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}, \quad 0 \leq t < \infty$$

其中  $Q_0$  與  $k$  為二正常數.

代  $t = 0$ , 得初始值

$$Q(0) = Q_0 e^{k(0)} = Q_0 e^0 = Q_0$$

根據指數函數的微分連鎖規則, 得變化率

$$Q'(t) = Q_0 e^{kt} k = k Q_0 e^{kt} = k Q(t)$$

因為  $Q(t) > 0$  且  $k > 0$ , 得  $Q'(t) > 0$ , 故  $Q(t)$  遞增. 此外, 由上式,  $Q(t)$  的遞增率  $Q'(t)$  與  $Q(t)$  成正比, 此乃表示  $Q(t)$  遞增時,  $Q(t)$  的增加率亦相對地遞

增而形成  $Q(t)$  非常快速地遞增, 如圖示. 綜合上述, 得指數函數

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}, \quad 0 \leq t < \infty$$

的二性質爲

1. 初始值  $Q(0) = Q_0$ .
2. 在任意  $t$  時的成長率  $Q'(t)$  與當時的量  $Q(t)$  成正比, 即

$$Q'(t) = kQ(t), \quad t > 0$$

並稱此函數呈現指數成長 (exponential growth), 且稱  $k$  爲成長常數 (growth constant, 或比例常數, proportionality).

如, 連續複利的結餘

$$A = Pe^{rt}$$

就是一呈現指數成長的函數. 其它未限制型的指數成長如

**例 1.** 在理想的實驗狀態下, 培養皿中的細菌數  $Q(t)$  乃根據

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

的定律成長, 其中  $Q_0$  為培養皿中的初始細菌數,  $k$  乃由實驗狀態所決定的常數, 且  $t$  為經過的小時數. 設開始時, 培養皿的細菌數為 10,000 且經過 2 小時後, 細菌數為 60,000.

(a) 試問 4 小時後有多少細菌?

(b) 試問 4 小時後的成長率為何?

<解> (a) 由給定值  $Q(0) = Q_0 = 10,000$ , 得

$$Q(t) = 10,000e^{kt}$$

再代  $t = 2$ ,  $Q = 60,000$ , 得

$$60,000 = 10,000e^{2k}$$

即

$$e^{2k} = 6 \quad (1)$$

同取  $\ln$ , 得

$$2k = \ln 6$$

即

$$k = \frac{1}{2} \ln 6 \approx 0.8959$$

因此,

$$Q(t) = 10,000e^{\left(\frac{1}{2}\ln 6\right)t} \approx 10,000e^{0.8959t}$$

最後, 代  $t = 4$ , 得 4 小時後的細菌數

$$Q(4) = 10,000e^{0.8959(4)} \approx 360,029$$

(b) 因為指數成長在任意  $t$  時的成長率與當時的數量成正比, 即

$$Q'(t) = kQ(t)$$

故代  $t = 4$  並由 (a), 4 小時後的成長率

$$\begin{aligned} Q'(4) &= kQ(4) \\ &\approx (0.8959)(360,029) \approx 322,550 \end{aligned}$$

即細菌數每小時約增加 322,550.

註. 將 (1) 式兩邊開方, 得

$$e^k = 6^{1/2}$$

即解出含  $k$  的數學式子亦可. 代入並根據指數律, 得

$$Q(t) = 10,000(e^k)^t = 10,000 \cdot 6^{t/2}$$

因此, 得準確值

$$Q(4) = 10,000 \cdot 6^2 = 360,000$$

又

$$Q'(t) = \left(\frac{1}{2} \ln 6\right) \cdot 10,000 \cdot 6^{t/2}$$

且

$$Q'(4) = 180,000(\ln 6)$$

## 二. 指數衰退 (exponential decay)

若某量的遞減率與當時的數量成正比, 則稱此量呈現指數衰退 (exponential decay). 描述此現象的數學模型為

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

其中正常數  $Q_0$  為初始量且  $k$  為某正常數, 稱作衰退常數 (decay constant).

為何如此? 代  $t = 0$ , 得初始值

$$Q(0) = Q_0 e^{-k(0)} = Q_0 e^0 = Q_0$$

根據指數函數的微分連鎖規則, 對  $t$  微分, 得

$$Q'(t) = Q_0 e^{-kt}(-k) = -kQ_0 e^{-kt} = -kQ(t)$$

因爲  $Q(t) > 0$  且  $k > 0$ , 故  $Q'(t) < 0$ , 表示  $Q(t)$  遞減且遞減率  $Q'(t)$  與當時的數量  $Q(t)$  成正比, 而形成  $Q(t)$  趨緩地遞減, 如圖示.

例 2. 放射性物質鐳在  $t$  時的數量乃根據

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

定律衰退. 半生期 (half-life) 乃數量減半所需的時間. 已知鐳的半生期約爲 1600 年且假設最初的數量爲 200 毫克.

(a) 試求  $t$  年後剩餘的數量.

(b) 試問 800 年後的數量爲何?

<解> (a) 已知初始值  $Q(0) = 200$ , 故

$$Q(t) = 200e^{-kt}$$

再根據半生期, 代  $t = 1600$  與  $Q = 100$ , 得

$$100 = 200e^{-1600k}$$

即

$$e^{-1600k} = \frac{1}{2}$$

同取  $\ln$ , 得

$$-1600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

即

$$k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0.0004332$$

因此,  $t$  年後的剩餘量為

$$Q(t) = 200e^{-0.0004332t}$$

(b) 代  $t = 800$ , 得 800 年後的剩餘量為

$$Q(800) = 200e^{-0.0004332(800)} \approx 141.42$$

註. 根據指數律, 由

$$e^{-1600k} = \frac{1}{2}$$

得

$$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1600}$$

代入, 得

$$Q(t) = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/1600}$$

因此, 代  $t = 800$ , 得

$$Q(800) = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{200}{\sqrt{2}}$$

例 3. 已知碳同位素碳-14 的半生期為 5770 年. 試求衰退常數.

<解> 根據指數衰退律,

$$Q(t) = Q_0 e^{-kt}$$

代  $t = 5770$  與  $Q = \frac{1}{2}Q_0$ , 得

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-5770k}$$

即

$$e^{-5770k} = \frac{1}{2}$$

同取  $\ln$ , 得

$$-5770k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

即

$$5770k = \ln 2$$

因此, 衰退常數

$$k = \frac{\ln 2}{5770} \approx 0.00012$$

註. 令  $t_h$  爲 半生期, 則

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-kt_h}$$

即

$$\frac{1}{2} = e^{-kt_h}$$

取  $\ln$  並化簡, 得

$$-kt_h = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

即恆等式

$$kt_h = \ln 2$$

也就是說,

$$(\text{衰退常數})(\text{半生期}) = \ln 2$$

例 4. 活的動植物組織中的碳-14 含量為一固定常數. 由於死後停止吸收新的碳-14, 故組織內殘留的碳-14 經由自然衰退會逐漸減少, 而可作為動植物化石的年代估計, 如假設一考古區內某頭顱的碳-14 含量僅為最初的十分之一, 試求此頭顱的年代.

<解> 由例 3 知, 經由  $t$  年後, 剩餘的碳-14 含量為

$$Q(t) = Q_0 e^{-0.00012t}$$

代目前的含量  $Q(t) = \frac{1}{10}Q_0$ , 得

$$\frac{1}{10}Q_0 = Q_0 e^{-0.00012t}$$

同除  $Q_0$  並取  $\ln$ , 得

$$-0.00012t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln 10$$

即

$$t = \frac{\ln 10}{0.00012} \approx 19,200$$

也就是說, 此生物約 19,000 年前死亡.

### 三. 學習曲線 (learning curves)

指數函數亦可描述學習過程的現象, 如函數

$$Q(t) = C - Ae^{-kt}$$

其中  $C$ ,  $A$  與  $k$  均為正常數.

代  $t = 0$ , 得

$$Q(0) = C - Ae^0 = C - A$$

對  $t$  微分, 得

$$Q'(t) = -Ae^{-kt}(-k) = kAe^{-kt} > 0$$

又

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q'(t) = kAe^{-\infty} = 0$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (C - Ae^{-kt}) \\ &= C - Ae^{-\infty} = C \end{aligned}$$

綜合上述,  $Q(t)$  開始時由  $C - A$  相當快速地遞增, 但之後遞增率會相當地趨緩而遞增至水平漸近線  $y = C$ , 如圖示. 此種函數的特性可描述高度重複工作的學習模式, 即組裝生產線上在初期由於訓練及經驗累積之故, 生產量會快速地遞增, 但由於工人及機器的極限, 產量的遞增率趨緩, 而接近某一固定的生產量, 並稱此種函數的圖形為一學習曲線.

例 5. 設某公司的新進職員經過一完整的基本訓練課程且開始工作  $t$  月後, 經由經驗的累積, 在生產線上每天所能組裝的產品數為

$$Q(t) = 50 - 30e^{-0.5t}$$

(a) 試問新進職員在完成基本訓練後每天能組裝多少件產品?

(b) 試問一職員有了 1 個月, 2 個月或 6 個月的工作經驗後, 每天能組裝的產品數分別為何?

(c) 試問一有豐富經驗的職員每天能組裝多少件產品?

<解> (a) 剛完成基本訓練相當於無任何工作經驗, 故代入  $t = 0$ , 得每天的組裝數為

$$Q(0) = 50 - 30e^0 = 50 - 30 = 20$$

(b) 代  $t = 1$ , 得有 1 個月工作經驗的職員的每天組裝數為

$$Q(1) = 50 - 30e^{-0.5} \approx 31.80$$

代  $t = 2$ , 得有 2 個月工作經驗的職員的每天組裝數為

$$Q(2) = 50 - 30e^{-1} \approx 38.96$$

代  $t = 6$ , 得有 6 個月工作經驗的職員的每天組裝數為

$$Q(6) = 50 - 30e^{-3} \approx 48.51$$

即每天分別約組裝 32, 39 與 49 件產品.

(c) 取在無窮遠的極限, 得有豐富經驗的職員的每天組裝數約為

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 50 - 30e^{-\infty} = 50$$

#### 四. 羅吉斯函數 (logistic functions)

函數

$$Q(t) = \frac{A}{1 + Be^{-kt}}$$

其中  $A$ ,  $B$  與  $k$  均為正常數, 稱作羅吉斯成長函數 (logistic growth function), 此函數的圖形, 如圖示, 稱作羅吉斯曲線 (logistic curve 或 S-型曲線), 呈現出開始時快速遞增, 但成長率  $Q'(t)$  遞減而造成成長趨緩現象, 且當時間無界遞增時,  $Q(t)$  會接近  $A$ . 也就是說,

羅吉斯曲線既呈現出指數成長曲線的快速成長性質（當剛開始， $t$  小的時候），又呈現出學習曲線的成長趨緩的飽和（saturation）特性（當  $t$  夠久後）。常用來描述受限於資源（食物，空間）的成長現象，且族群大小最後會穩定地達到一個與環境生命支持量（life-support capacity）相容的狀態  $A$ ，故稱  $A$  為環境承載量（carrying capacity）。此外，羅吉斯模型亦常用於描述謠言散播與流行病的傳染等現象。

例 6. 設某營區在流感發生  $t$  天後的士兵感染數

$$Q(t) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-kt}}$$

若 7 天後有 40 位士兵感染，試求 15 天後的士兵感染數。

<解> 首先，代  $t = 7$  與  $Q = 40$  並解  $k$ ，得

$$40 = \frac{5000}{1 + 1249e^{-7k}}$$

整理，得

$$e^{-7k} = \frac{1}{1249} \left( \frac{5000}{40} - 1 \right) = \frac{124}{1249}$$

兩邊取  $\ln$ ，得

$$-7k = \ln \left( \frac{124}{1249} \right)$$

即

$$k = -\frac{1}{7} \ln \left( \frac{124}{1249} \right) = \frac{1}{7} \ln \left( \frac{1249}{124} \right) \approx 0.33$$

代入, 得  $t$  天後的士兵感染數為

$$Q(t) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-0.33t}}$$

最後, 代  $t = 15$ , 得

$$Q(15) = \frac{5000}{1 + 1249e^{-0.33(15)}} \approx 508$$

即, 15 天後約有 508 位士兵感染流感.

註. 亦可以含  $k$  的數學式推導, 如由

$$e^{-7k} = (e^{-k})^7 = \frac{124}{1249}$$

得

$$e^{-k} = \left( \frac{124}{1249} \right)^{1/7}$$

代入, 得

$$Q(t) = \frac{5000}{1 + 1249 \left( \frac{124}{1249} \right)^{t/7}}$$